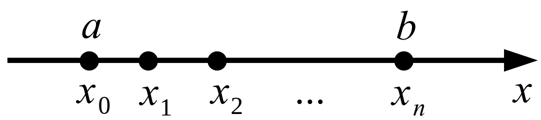
Интегралы и дифференциальные уравнения Модуль 2
Определенные и несобственные интегралы
Лекция 2.1
(для ГУИМЦ, 2025)

Аннотация

Определенный интеграл: определение, свойства и геометрический смысл. Условия интегрируемости функций.

1 Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a, b]$ выбрана конечная последовательность точек $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$.



Определение

Совокупность точек $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$ называется **разбиением отрезка** $[a, b]$.

Обозначение: $\tau_n = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ или $\tau_n = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$.

Длина каждого получившегося в результате разбиения отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ определяется как

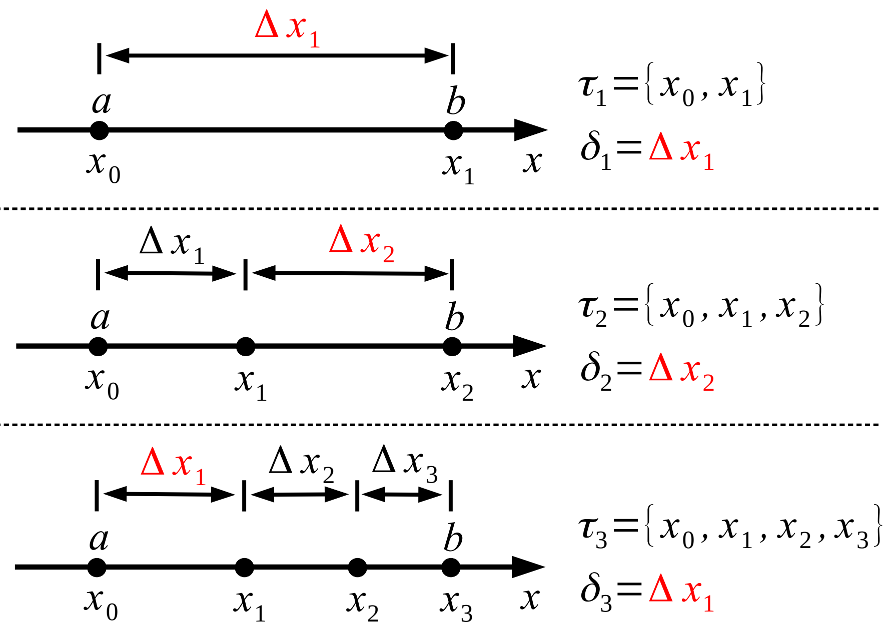
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Определение

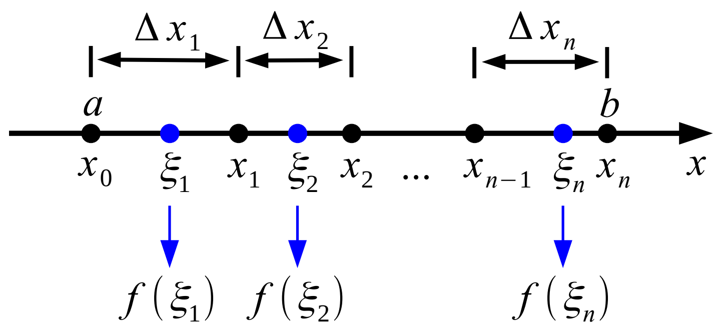
Длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1, 2, ..., n$, называется **мелкостью разбиения**.

Обозначение: $\delta_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$.

Примеры:



Пусть дано некоторое разбиение τ_n отрезка $[a, b]$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и для каждой ξ_i вычислим значение $f(\xi_i)$ функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$.



Составим сумму:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определение

Сумма
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$
называется **интегральной суммой Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

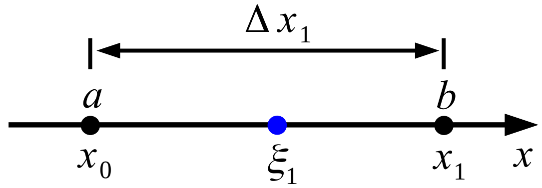
Обозначение: σ_n.

Замечание

Любой последовательности разбиений
$$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \ldots$$
соответствует своя последовательность интегральных сумм
$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots\ .$$

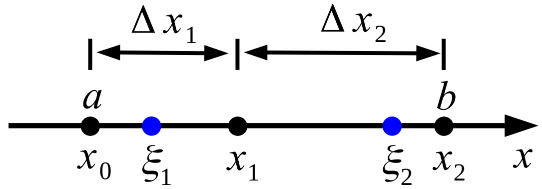
Например,

(1)



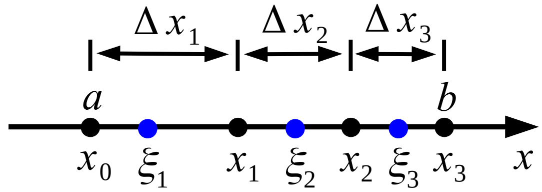
$$\tau_1 = \{x_0, x_1\} \to \sigma_1 = f(\xi_1)\Delta x_1,$$

(2)



$$\tau_2 = \{x_0, x_1, x_2\} \to \sigma_2 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2,$$

(3)



$$\tau_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} \to \sigma_3 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3.$$

Определение

Число A называется **определенным интегралом Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любой последовательности разбиений τ_1, τ_2, τ_3, ... этого отрезка, когда $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, и при любом выборе точек ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = A.$$

Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определение

Число a называется **нижним пределом интегрирования**.

Определение

Число b называется **верхним пределом интегрирования**.

Определение

Если у функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует определенный интеграл, то она называется **интегрируемой по Риману** на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла:

1) свойство аддитивности:

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, $a < c < b$,

2) свойство линейности:

$\int\limits_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx \pm \beta \int\limits_a^b g(x)dx$, $\alpha, \beta \in R$

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$,

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$,

5) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$

Теорема (об оценке)

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

где $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$

Теорема (о среднем значении)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на интервале (a, b) существует такая точка ξ, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Определение

Значение $f(\xi)$ называется **средним значением** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

2 Геометрический смысл определенного интеграла

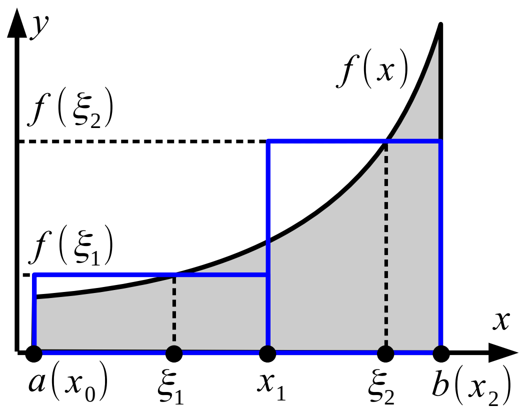
Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $f(x)$ и снизу осью Ox на отрезке $[a, b]$. На рисунках ниже эта фигура окрашена в серый цвет. Пусть S – площадь этой криволинейной трапеции.

Проведем разбиение $\tau_2 = \{x_0 = a, x_1, x_2 = b\}$ отрезка $[a, b]$ (см. левый рисунок ниже). На получившихся отрезках $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ выберем произвольно точки ξ_1 и ξ_2 и построим прямоугольники высотой $f(\xi_1)$ и $f(\xi_2)$. Эти прямоугольники образуют ступенчатую фигуру с площадью

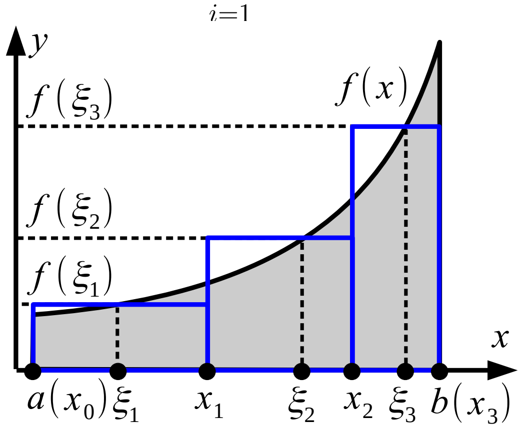
$$\sigma_2 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 = \sum_{i=1}^{2} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Теперь проведем разбиение $\tau_3 = \{x_0 = a, x_1, x_2, x_3 = b\}$ отрезка $[a, b]$ (см. правый рисунок ниже). На получившихся отрезках $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ и $[x_2, x_3]$ выберем произвольно точки ξ_1, ξ_2 и ξ_3 и построим прямоугольники высотой $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$ и $f(\xi_3)$. Эти прямоугольники образуют ступенчатую фигуру с площадью

$$\sigma_3 = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 = \sum_{i=1}^{3} f(\xi_i)\Delta x_i.$$



Разбиение τ_2



Разбиение τ_3

Ступенчатая фигура на правом рисунке точнее отражает форму криволинейной трапеции, чем на левом. Следовательно, ее площадь σ_3 по значению ближе к площади криволинейной трапеции S, чем площадь σ_2. Далее, ступенчатая фигура, построенная по разбиению τ_4, будет по форме еще ближе к криволинейной трапеции, а значит, ее площадь σ_4 будет отличаться от S еще меньше, чем σ_3. Таким образом, увеличивая количество точек в разбиении отрезка $[a, b]$, мы получаем последовательность $\{\sigma_n\}$, члены которой постепенно приближаются к S, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S.$$

С другой стороны, σ_n является интегральной суммой Римана, а значит, по определению определенного интеграла

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Тогда получаем, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S,$$

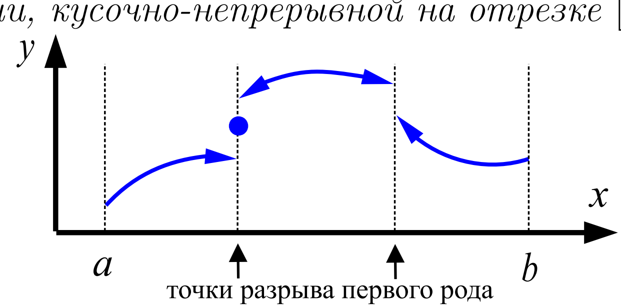
т.е. определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$ и осью Ox на этом же отрезке.

3 Условия интегрируемости функций

Определение

Функция называется **кусочно-непрерывной** на отрезке, если она задана и непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме, быть может, конечного их числа, в которых она имеет конечные односторонние пределы.

Пример функции, кусочно-непрерывной на отрезке $[a, b]$:



Теорема (об интегрируемости кусочно-непрерывных функций)

Всякая кусочно-непрерывная на данном отрезке функция интегрируема по Риману на нем.

Следствие

Всякая непрерывная на данном отрезке функция интегрируема по Риману на нем.