Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 1

Неопределенный интеграл

Лекция 1.2

для ГУИМЦ, 2025

к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.

Рациональные дроби

Определение

Рациональной дробью или **рациональной функцией** называется отношение двух многочленов

Определение

Рациональной дробью или **рациональной функцией** называется отношение двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Определение

Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Определение
Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Пример:

Определение

Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Пример: $\dfrac{x^2+3x+4}{x^3-4x^2+5x-2}$.

Рациональные дроби

Определение

Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, больше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Определение
Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, больше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Пример:

Определение

Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, больше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Пример: $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{x - 4}$.

Теорема (о переходе от неправильной рациональной дроби к правильной)

Рациональные дроби

Теорема (о переходе от неправильной рациональной дроби к правильной)
Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Рациональные дроби

Пример:

Пример:

Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}.$$

Пример:

Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x + 4}{x^2 + x - 6}.$$

Разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

Пример:

Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x + 4}{x^2 + x - 6}.$$

Разделим числитель этой дроби на

знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 + 3x + 4 & x^2 + x - 6 \\ \hline & \end{array}$$

Рациональные дроби

Пример:

Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}.$$

Разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+3x+4 & x^2+x-6 \\ \cline{2-2} & x \end{array}$$

Пример:

Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x + 4}{x^2 + x - 6}.$$

Разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 + 3x + 4 & x^2 + x - 6 \\ \cline{2-2} x^3 + x^2 - 6x \phantom{{}+4} & x \end{array}$$

Рациональные дроби

Пример:

Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3 + x^2 + 3x + 4}{x^2 + x - 6}.$$

Разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3 + x^2 + 3x + 4 \\ x^3 + x^2 - 6x \end{array} & \begin{array}{l} x^2 + x - 6 \\ \hline x \end{array} \end{array}$$

Пример:

Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}.$$

Разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3+x^2+3x+4 \\ \underline{x^3+x^2-6x} \end{array} & \dfrac{x^2+x-6}{x} \end{array}$$

Пример:

Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}.$$

Разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} - \begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ \underline{x^3+x^2-6x} \\ 9x \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x \\ \end{array} \end{array}$$

Пример:

Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}.$$

Разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ x^3+x^2-6x \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x \end{array} \\ \hline 9x+4 & \end{array}$$

Пример:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2+3x+4 & x^2+x-6 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3+x^2-6x} & x \\
9x+4 &
\end{array}
$$

Рациональные дроби

Пример:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x^2+3x+4 & x^2+x-6 \\
\cline{2-2}
-\ \underline{x^3+x^2-6x} & x \\
9x+4 &
\end{array}
$$

Рациональные дроби

Пример:

$$
\begin{array}{r|l}
- \begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ \underline{x^3+x^2-6x} \\ 9x+4 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x \\ \end{array}
\end{array}
$$

Пример:

$$
\begin{array}{rr|l}
- & x^3+x^2+3x+4 & x^2+x-6 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^3+x^2-6x} & x \\
 & 9x+4 &
\end{array}
$$

Рациональные дроби

Пример:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ \underline{x^3+x^2-6x} \\ 9x+4 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x \end{array}
\end{array}
$$

Пример:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ \underline{x^3+x^2-6x} \\ 9x+4 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x \\ \end{array} \end{array}$$

В результате исходная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби

Пример:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ \underline{x^3+x^2-6x} \\ 9x+4 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x \\ \end{array} \end{array}$$

В результате исходная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}$$

Пример:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ \underline{x^3+x^2-6x} \\ 9x+4 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x \\ \end{array}
\end{array}
$$

В результате исходная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6} = x + \frac{9x+4}{x^2+x-6}.$$

Пример:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ x^3+x^2-6x \\ \hline 9x+4 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x \end{array} \end{array}$$

В результате исходная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6} = x + \frac{9x+4}{x^2+x-6}.$$

Рациональные дроби

Пример:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^3+x^2+3x+4 \\ \underline{x^3+x^2-6x} \\ 9x+4 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-6 \\ \hline x \\ \end{array}
\end{array}
$$

В результате исходная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6} = x + \frac{9x+4}{x^2+x-6}.$$

Определение

Простейшими (элементарными) рациональными дробями называют дроби четырех типов:

Определение

Простейшими (элементарными) рациональными дробями называют дроби четырех типов:

$$(1)\ \frac{1}{x-a},$$

Определение

Простейшими (элементарными) рациональными дробями называют дроби четырех типов:

$$(1)\ \frac{1}{x-a},\ (2)\ \frac{1}{(x-a)^n},$$

Определение

Простейшими (элементарными) рациональными дробями называют дроби четырех типов:

$$(1)\ \frac{1}{x-a},\quad (2)\ \frac{1}{(x-a)^n},$$

$$(3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

Определение

Простейшими (элементарными) рациональными дробями называют дроби четырех типов:

$$(1)\ \frac{1}{x-a},\ (2)\ \frac{1}{(x-a)^n},$$

$$(3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ (4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

Определение

Простейшими (элементарными) рациональными дробями называют дроби четырех типов:

$$(1)\ \frac{1}{x-a},\ (2)\ \frac{1}{(x-a)^n},$$

$$(3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ (4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

где $D = p^2 - 4q < 0$,

Определение

Простейшими (элементарными) рациональными дробями называют дроби четырех типов:

$$(1)\ \frac{1}{x-a},\ (2)\ \frac{1}{(x-a)^n},$$

$$(3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ (4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

где $D = p^2 - 4q < 0$, т.е. $x^2 + px + q$ неразложим на множители,

Определение

Простейшими (элементарными) рациональными дробями называют дроби четырех типов:

$$(1)\ \frac{1}{x-a},\ (2)\ \frac{1}{(x-a)^n},$$

$$(3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ (4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

где $D = p^2 - 4q < 0$, т.е. $x^2 + px + q$ неразложим на множители, $n \geq 2$, $m \geq 2$.

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби)

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби)

Любую правильную рациональную дробь

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

Рациональные дроби

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби)

Любую правильную рациональную дробь

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

у которой

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \cdot \ldots \cdot (x-b)^\beta \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^\gamma \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^\delta,$$

Рациональные дроби

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби)

Любую правильную рациональную дробь

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

у которой

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \cdot \ldots \cdot (x-b)^\beta \cdot \\ \cdot (x^2+px+q)^\gamma \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^\delta,$$

можно представить в виде

суммы элементарных дробей

по следующему правилу

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} \cdot \\ \cdot (x^2+px+q)^{\gamma} \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^{\delta}$$

по следующему правилу

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} \cdot \\ \cdot (x^2+px+q)^{\gamma} \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^{\delta}$$

по следующему правилу

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^{\gamma} \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^{\delta}$$

по следующему правилу

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \cdot \ldots \cdot (x-b)^\beta \cdot \\ \cdot (x^2+px+q)^\gamma \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^\delta$$

по следующему правилу

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^{\gamma} \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^{\delta}$$

по следующему правилу

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^{\gamma} \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^{\delta}$$

по следующему правилу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$$

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^{\gamma} \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^{\delta}$$

по следующему правилу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}$$

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \cdot \ldots \cdot (x-b)^\beta \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^\gamma \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^\delta$$

по следующему правилу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots +$$

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \cdot \ldots \cdot (x-b)^\beta \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^\gamma \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^\delta$$

по следующему правилу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots +$$
$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}$$

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^{\gamma} \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^{\delta}$$

по следующему правилу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots +$$
$$+\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\gamma x+N_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma}$$

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \cdot \ldots \cdot (x-b)^\beta \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^\gamma \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^\delta$$

по следующему правилу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots +$$
$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\gamma x+N_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma} +$$

$$+ \ldots +$$

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \cdot \ldots \cdot (x-b)^\beta \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^\gamma \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^\delta$$

по следующему правилу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots +$$
$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\gamma x+N_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma} +$$
$$+ \ldots + \frac{K_1x+L_1}{x^2+rx+s} + \frac{K_2x+L_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{K_\delta x+L_\delta}{(x^2+rx+s)^\delta}.$$

Рациональные дроби

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot \ldots \cdot (x-b)^{\beta} \cdot$$
$$\cdot (x^2+px+q)^{\gamma} \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^{\delta}$$

по следующему правилу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \ldots +$$
$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} +$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_{\gamma}x+N_{\gamma}}{(x^2+px+q)^{\gamma}} +$$
$$+ \ldots + \frac{K_1x+L_1}{x^2+rx+s} + \frac{K_2x+L_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{K_{\delta}x+L_{\delta}}{(x^2+rx+s)^{\delta}}.$$

Рациональные дроби

Коэффициенты разложения A_1, A_2, ..., K_δ, L_δ находятся с помощью двух методов -

Коэффициенты разложения A_1, A_2, ..., K_δ, L_δ находятся с помощью двух методов - **метода частных значений**

Рациональные дроби

Коэффициенты разложения A_1, A_2, ..., K_δ, L_δ находятся с помощью двух методов - **метода частных значений** и **метода неопределенных коэффициентов**.

Рациональные дроби

Коэффициенты разложения A_1, A_2, ..., K_δ, L_δ находятся с помощью двух методов - **метода частных значений** и **метода неопределенных коэффициентов**.

Рассмотрим эти методы на примерах.

Рациональные дроби

Пример:

Рациональные дроби

Пример: Разложить дробь
$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
на сумму простейших дробей.

Рациональные дроби

Пример: Разложить дробь

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

на сумму простейших дробей.

Рациональные дроби

Пример: Разложить дробь

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

на сумму простейших дробей.

В числителе нашей дроби стоит многочлен второй степени,

Рациональные дроби

Пример: Разложить дробь
$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
на сумму простейших дробей.

В числителе нашей дроби стоит многочлен второй степени, в знаменателе - многочлен третьей степени.

Пример: Разложить дробь
$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
на сумму простейших дробей.

В числителе нашей дроби стоит многочлен второй степени, в знаменателе - многочлен третьей степени. Степень числителя меньше степени знаменателя.

Пример: Разложить дробь

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

на сумму простейших дробей.

Значит, дробь правильная, и к ней применима теорема о разложении правильной рациональной дроби,

Пример: Разложить дробь

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

на сумму простейших дробей.

Значит, дробь правильная, и к ней применима теорема о разложении правильной рациональной дроби, согласно которой

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Рациональные дроби

Пример: Разложить дробь
$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
на сумму простейших дробей.

Значит, дробь правильная, и к ней применима теорема о разложении правильной рациональной дроби, согласно которой
$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Пример: Разложить дробь

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

на сумму простейших дробей.

Значит, дробь правильная, и к ней применима теорема о разложении правильной рациональной дроби, согласно которой

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Пример: Разложить дробь

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

на сумму простейших дробей.

Значит, дробь правильная, и к ней применима теорема о разложении правильной рациональной дроби, согласно которой

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Пример: Разложить дробь

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

на сумму простейших дробей.

Значит, дробь правильная, и к ней применима теорема о разложении правильной рациональной дроби, согласно которой

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{\qquad}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$
$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$
$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$
$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Поскольку знаменатели обеих дробей равны,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Поскольку знаменатели обеих дробей равны, то должны быть равны и их числители

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Поскольку знаменатели обеих дробей равны, то должны быть равны и их числители:

$$(*)\ x^2+1 =$$

$$= A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

Рациональные дроби

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Поскольку знаменатели обеих дробей равны, то должны быть равны и их числители:

$$(*)\ x^2+1 =$$

$$= A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

Рациональные дроби

$$(*)\ x^2+1=$$
$$=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

$$(*)\ x^2+1=$$
$$=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

Рациональные дроби

$$(*)\ x^2+1=$$
$$=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

Рациональные дроби

$$(*)\ x^2 + 1 =$$
$$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Рациональные дроби

$$(*)\ x^2 + 1 =$$

$$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

Равенство $(*)$ справедливо при любых значениях переменной x.

Рациональные дроби

$(*)\ x^2+1=$

$=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$

Равенство $(*)$ справедливо при любых значениях переменной x. Поэтому в **методе частных значений** мы придаем переменной x три произвольных значения и подставляем их в $(*)$.

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*):$

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \rightarrow (*) : 2$

Рациональные дроби

$(*)\ x^2+1=$

$= A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x=1 \to (*) : 2 = 2\cdot A$

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B$

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$

$$(*)\ x^2+1=$$
$$=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$$

В результате получаются три равенства

$$x=1\to(*):2=2\cdot A+0\cdot B+0\cdot C$$

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A$,

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A,$

$x = 2 \to (*) :$

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A$,

$x = 2 \to (*) : 5 = 0 \cdot A - 1 \cdot B + 0 \cdot C$

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A$,

$x = 2 \to (*) : 5 = 0 \cdot A - 1 \cdot B + 0 \cdot C$ или $5 = -1 \cdot B$,

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A$,

$x = 2 \to (*) : 5 = 0 \cdot A - 1 \cdot B + 0 \cdot C$ или $5 = -1 \cdot B$,

$x = 3 \to (*) :$

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A$,

$x = 2 \to (*) : 5 = 0 \cdot A - 1 \cdot B + 0 \cdot C$ или $5 = -1 \cdot B$,

$x = 3 \to (*) : 10 = 0 \cdot A + 0 \cdot B + 2 \cdot C$

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A$,

$x = 2 \to (*) : 5 = 0 \cdot A - 1 \cdot B + 0 \cdot C$ или $5 = -1 \cdot B$,

$x = 3 \to (*) : 10 = 0 \cdot A + 0 \cdot B + 2 \cdot C$ или $10 = 2 \cdot C$,

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A$,

$x = 2 \to (*) : 5 = 0 \cdot A - 1 \cdot B + 0 \cdot C$ или $5 = -1 \cdot B$,

$x = 3 \to (*) : 10 = 0 \cdot A + 0 \cdot B + 2 \cdot C$ или $10 = 2 \cdot C$,

из которых находятся неизвестные коэффициенты:

$(*)\ x^2+1=$

$= A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x=1 \to (*): 2 = 2\cdot A + 0\cdot B + 0\cdot C$ или $2 = 2\cdot A$,

$x=2 \to (*): 5 = 0\cdot A - 1\cdot B + 0\cdot C$ или $5 = -1\cdot B$,

$x=3 \to (*): 10 = 0\cdot A + 0\cdot B + 2\cdot C$ или $10 = 2\cdot C$,

из которых находятся неизвестные коэффициенты:

$$A=1,$$

Рациональные дроби

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A$,

$x = 2 \to (*) : 5 = 0 \cdot A - 1 \cdot B + 0 \cdot C$ или $5 = -1 \cdot B$,

$x = 3 \to (*) : 10 = 0 \cdot A + 0 \cdot B + 2 \cdot C$ или $10 = 2 \cdot C$,

из которых находятся неизвестные коэффициенты:

$$A = 1,\ B = -5,$$

$(*)\ x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x = 1 \to (*) : 2 = 2 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$ или $2 = 2 \cdot A$,

$x = 2 \to (*) : 5 = 0 \cdot A - 1 \cdot B + 0 \cdot C$ или $5 = -1 \cdot B$,

$x = 3 \to (*) : 10 = 0 \cdot A + 0 \cdot B + 2 \cdot C$ или $10 = 2 \cdot C$,

из которых находятся неизвестные коэффициенты:

$$A = 1,\ B = -5,\ C = 5.$$

$(*)\ x^2+1=$

$= A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$

В результате получаются три равенства

$x=1 \to (*): 2 = 2\cdot A + 0\cdot B + 0\cdot C$ или $2 = 2\cdot A$,

$x=2 \to (*): 5 = 0\cdot A - 1\cdot B + 0\cdot C$ или $5 = -1\cdot B$,

$x=3 \to (*): 10 = 0\cdot A + 0\cdot B + 2\cdot C$ или $10 = 2\cdot C$,

из которых находятся неизвестные коэффициенты:

$$A=1,\ B=-5,\ C=5.$$

$(*)\ x^2+1=$

$=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).$

В **методе неопределенных коэффициентов** мы раскрываем скобки в правой части равенства $(*)$ и группируем члены с одинаковыми степенями

Рациональные дроби

$(*)$ $x^2 + 1 =$

$= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$

В **методе неопределенных коэффициентов** мы раскрываем скобки в правой части равенства $(*)$ и группируем члены с одинаковыми степенями:

$x^2 + 1 =$

$= (A+B+C)x^2 - (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C).$

Рациональные дроби

$$x^2 + 1 =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$$x^2 + 1 =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$$x^2 + 1 =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$$x^2 + 1 =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$$x^2 + 1 =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$x^2 + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Два многочлена равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях.

Рациональные дроби

$x^2+1=$

$=(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2C).$

Два многочлена равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях.

Отсутствие x слева в равенстве означает, что коэффициент при нем равен нулю

Рациональные дроби

$x^2 + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Два многочлена равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях.

Отсутствие x слева в равенстве означает, что коэффициент при нем равен нулю:

$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Рациональные дроби

$x^2 + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Два многочлена равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях.

Отсутствие x слева в равенстве означает, что коэффициент при нем равен нулю:

$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Рациональные дроби

$x^2 + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Два многочлена равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях.

Отсутствие x слева в равенстве означает, что коэффициент при нем равен нулю:

$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Рациональные дроби

$$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$$
$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$$

$$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$$

Рациональные дроби

$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа в равенстве, получаем

Рациональные дроби

$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа в равенстве, получаем

$$A + B + C = 1,$$

Рациональные дроби

$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа в равенстве, получаем

$$A + B + C = 1,$$

$$5A + 4B + 3C = 0,$$

Рациональные дроби

$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа в равенстве, получаем

$$A + B + C = 1,$$
$$5A + 4B + 3C = 0,$$
$$6A + 3B + 2C = 1,$$

Рациональные дроби

$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа в равенстве, получаем

$$A + B + C = 1,$$
$$5A + 4B + 3C = 0,$$
$$6A + 3B + 2C = 1,$$

Рациональные дроби

$1 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 1 =$

$= (A + B + C)x^2 - (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C).$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа в равенстве, получаем

$$A + B + C = 1,$$
$$5A + 4B + 3C = 0,$$
$$6A + 3B + 2C = 1,$$

откуда находим, что

$$A = 1,\ B = -5,\ C = 5.$$

Рациональные дроби

$$A = 1,\ B = -5,\ C = 5.$$

Рациональные дроби

$$A = 1,\ B = -5,\ C = 5.$$

Рациональные дроби

$$A = 1,\ B = -5,\ C = 5.$$

Рациональные дроби

$$A = 1,\ B = -5,\ C = 5.$$

Рациональные дроби

$$A = 1,\ B = -5,\ C = 5.$$

$$A = 1,\ B = -5,\ C = 5.$$

Обратим внимание, что оба рассмотренных метода всегда дают одни и те же значения для коэффициентов разложения правильной дроби.

$$A = 1,\ B = -5,\ C = 5.$$

Обратим внимание, что оба рассмотренных метода всегда дают одни и те же значения для коэффициентов разложения правильной дроби.

Тогда разложение исходной дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование первых двух типов простейших дробей проводится методом подведения под знак дифференциала

Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование первых двух типов простейших дробей проводится методом подведения под знак дифференциала с учетом, что

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x - a) = (x - a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

$$\int \frac{dx}{x-a}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{x-a}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{x-a} = \int \frac{d\varphi}{\varphi}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{x-a} = \int \frac{d\varphi}{\varphi}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{x-a} = \int \frac{d\varphi}{\varphi} =$$

$$= \ln|\varphi| + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a)=(x-a)'\cdot dx=1\cdot dx=dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

$$\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{x-a}=\int\frac{d\varphi}{\varphi}=$$

$$=\ln|\varphi|+C=\ln|x-a|+C.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{(x-a)^n}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{(x-a)^n} = \int \frac{d\varphi}{\varphi^n}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{(x-a)^n} = \int \frac{d\varphi}{\varphi^n}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{(x-a)^n} = \int \frac{d\varphi}{\varphi^n} = \int \varphi^{-n} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{(x-a)^n} = \int \frac{d\varphi}{\varphi^n} = \int \varphi^{-n} d\varphi =$$

$$= \frac{\varphi^{-n+1}}{-n+1} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{(x-a)^n} = \int \frac{d\varphi}{\varphi^n} = \int \varphi^{-n} d\varphi =$$

$$= \frac{\varphi^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C, \; n \geq 2.$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

x^2+px+q

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} + q =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{a^2} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

а затем применяется метод подведения под знак дифференциала

Интегрирование простейших рациональных дробей

а затем применяется метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

а затем применяется метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

а затем применяется метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx =$$

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2})+N-M\cdot\dfrac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}d(x+\frac{p}{2})$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

а затем применяется метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx =$$

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2})+N-M\cdot\dfrac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}d\left(x+\frac{p}{2}\right)$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

а затем применяется метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx =$$

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2})+N-M\cdot\dfrac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}d(x+\frac{p}{2})$$

а затем применяется метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx =$$

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2}) + \overbrace{N-M\cdot\frac{p}{2}}^{B}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2} d\underbrace{(x+\frac{p}{2})}_{\varphi}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2}) + \overbrace{N-M\cdot\frac{p}{2}}^{B}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} d\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)}_{\varphi}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2}) + \overbrace{N - M \cdot \frac{p}{2}}^{B}}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} d\underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)}_{\varphi}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2}) + \overbrace{N - M \cdot \frac{p}{2}}^{B}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} d\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)}_{\varphi}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2}) + \overbrace{N - M \cdot \frac{p}{2}}^{B}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} d(\underbrace{x+\frac{p}{2}}_{\varphi})$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2}) + \overbrace{N - M \cdot \frac{p}{2}}^{B}}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} d(\underbrace{x + \frac{p}{2}}_{\varphi})$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2}) + \overbrace{N - M \cdot \frac{p}{2}}^{B}}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} d\underbrace{(x + \frac{p}{2})}_{\varphi} =$$

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right) + \overbrace{N - M\cdot\frac{p}{2}}^{B}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2}\, d\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)}_{\varphi} =$$

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2}\, d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2}) + \overbrace{N - M\cdot\frac{p}{2}}^{B}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} d\underbrace{(x+\frac{p}{2})}_{\varphi} =$$

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= M \int \frac{\varphi}{\varphi^2 + a^2} d\varphi + B \int \frac{1}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= M \int \frac{\varphi}{\varphi^2 + a^2} d\varphi + B \int \frac{1}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= M \int \frac{\varphi}{\varphi^2 + a^2} d\varphi + B \int \frac{1}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= M \int \frac{\varphi}{\varphi^2 + a^2} d\varphi + B \int \frac{1}{\varphi^2 + a^2} d\varphi$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= M \int \frac{\varphi}{\varphi^2 + a^2} d\varphi + B \int \frac{1}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{2\varphi d\varphi}{\varphi^2 + a^2} + B \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= M \int \frac{\varphi}{\varphi^2 + a^2} d\varphi + B \int \frac{1}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{2\varphi d\varphi}{\varphi^2 + a^2} + B \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi+B}{\varphi^2+a^2}d\varphi =$$

$$= M\int \frac{\varphi}{\varphi^2+a^2}d\varphi + B\int \frac{1}{\varphi^2+a^2}d\varphi =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2\varphi d\varphi}{\varphi^2+a^2} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2+a^2)}{\varphi^2+a^2} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= M \int \frac{\varphi}{\varphi^2 + a^2} d\varphi + B \int \frac{1}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{2\varphi d\varphi}{\varphi^2 + a^2} + B \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d(\varphi^2 + a^2)}{\underbrace{\varphi^2 + a^2}_{u}} + B \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2+a^2)}{\underbrace{\varphi^2+a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d(\varphi^2 + a^2)}{\underbrace{\varphi^2 + a^2}_{u}} + B \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2 + a^2)}{\underbrace{\varphi^2 + a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2 + a^2)}{\underbrace{\varphi^2 + a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d(\varphi^2 + a^2)}{\underbrace{\varphi^2 + a^2}_{u}} + B \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2 + a^2)}{\underbrace{\varphi^2 + a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2 + a^2)}{\underbrace{\varphi^2 + a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{du}{u} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2}$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2+a^2)}{\underbrace{\varphi^2+a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{du}{u} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|u| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2 + a^2)}{\underbrace{\varphi^2 + a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{du}{u} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|u| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2+a^2)}{\underbrace{\varphi^2+a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{du}{u} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|u| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|\varphi^2+a^2| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2+a^2)}{\underbrace{\varphi^2+a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{du}{u} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|u| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|\varphi^2+a^2| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2} \ln|\varphi^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2} \ln |\varphi^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\ln|\varphi^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2} \ln |\varphi^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\ln\left|\varphi^2 + a^2\right| + B \cdot \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2} \ln |\varphi^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2} \ln |\varphi^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{a} + C$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\ln\left|\varphi^2 + a^2\right| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C,$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2}\ln|\varphi^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|(x + \frac{p}{2})^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C,$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

$$= \frac{M}{2} \ln|\varphi^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2} \ln|(x + \frac{p}{2})^2 + a^2| + B \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C,$$

где $a^2 = q - p^2/4$, $B = N - M \cdot p/2$.

Интегрирование простейшей дроби **четвертого типа**

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, m \geq 2$$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование простейшей дроби **четвертого типа**

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, m \geq 2$$

представляет собой довольно трудоемкий процесс, требующий привлечения специально выводимой рекуррентной формулы.

Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование простейшей дроби **четвертого типа**

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, m \geq 2$$

представляет собой довольно трудоемкий процесс, требующий привлечения специально выводимой рекуррентной формулы.

Подробное описание процесса интегрирования дробей этого типа при необходимости можно найти в справочной литературе.

Интегрирование произвольных рациональных дробей

Интегрирование произвольных рациональных дробей

Алгоритм интегрирования произвольной рациональной дроби включает три шага:

Интегрирование произвольных рациональных дробей

Алгоритм интегрирования произвольной рациональной дроби включает три шага:

1. Представляем неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Интегрирование произвольных рациональных дробей

Алгоритм интегрирования произвольной рациональной дроби включает три шага:

1. Представляем неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.
2. Правильную рациональную дробь раскладываем на сумму простейших дробей.

Интегрирование произвольных рациональных дробей

Алгоритм интегрирования произвольной рациональной дроби включает три шага:

1. Представляем неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.
2. Правильную рациональную дробь раскладываем на сумму простейших дробей.
3. Интегрируем многочлен и полученные простейшие дроби.