Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Интегралы и дифференциальные уравнения

Модуль 1

Неопределенный интеграл

Лекция 1.1

для ГУИМЦ, 2025

к.ф.-м.н. Емгушева Г.П.

Неопределенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b).

Неопределенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b).

Определение

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на этом интервале и

$$\forall x \in (a, b) \; F'(x) = f(x).$$

Свойства первообразной

Свойства первообразной

1. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на интервале (a, b), то $F(x) + C$, где C - некоторая постоянная, тоже является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Свойства первообразной

1. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на интервале (a, b), то $F(x) + C$, где C - некоторая постоянная, тоже является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b).

2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные функции $f(x)$ на интервале (a, b), то на этом интервале они отличаются лишь на некоторую постоянную, т.е.

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \; C = const.$$

Определение

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Определение

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Обозначение:

Определение
Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на интервале (a, b).
Обозначение: $\int f(x) \cdot dx$,

Определение

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Обозначение: $\int f(x) \cdot dx$, $\int f(x)dx$.

Определение

Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**.

Неопределенный интеграл

Если $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Если $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Выражение $F(x) + C$ обозначает множество всех первообразных функции $f(x)$.

Если $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Выражение $F(x) + C$ обозначает множество всех первообразных функции $f(x)$.

Каждая конкретная первообразная выбирается из этого множества путем придания произвольной постоянной C конкретного значения.

Под выражением $\int f(x)dx$ иногда понимается не вся совокупность первообразных, а только какая-то одна произвольная первообразная, если нет необходимости ее конкретизировать путем выбора определенного значения C.

Замечание

Замечание
В неопределенном интеграле независимая переменная может обозначаться любым способом.

Замечание

В неопределенном интеграле независимая переменная может обозначаться любым способом. Например, интегралы

$$\int f(x)dx,\ \int f(t)dt,\ \int f(u)du$$

идентичны с точностью до обозначения независимой переменной.

Определение

Процесс нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется **интегрированием**.

Теорема (достаточное условие существования неопределенного интеграла)

Теорема (достаточное условие существования неопределенного интеграла)
Функция, непрерывная на заданном интервале, имеет на этом интервале первообразную, а значит, и неопределенный интеграл.

Свойства неопределенного интеграла:

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
2. $\int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$, $k = const.$

Таблица неопределенных интегралов:

Таблица неопределенных интегралов:

1) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,$

Таблица неопределенных интегралов:

1) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,$

2) $\int dx = x + C,$

Таблица неопределенных интегралов:

1) $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1,$

2) $\displaystyle\int dx = x + C,$

3) $\displaystyle\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C,$

4) $\displaystyle\int e^{x}dx = e^{x} + C,$

Таблица неопределенных интегралов:

1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,$

2) $\displaystyle\int dx = x + C,$

3) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

4) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C,$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

Таблица неопределенных интегралов:

6) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C,$

7) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C,$

Таблица неопределенных интегралов:

6) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C,$

7) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C,$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

Таблица неопределенных интегралов:

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C,$

Таблица неопределенных интегралов:

10) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C,$$

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+C,$$

Таблица неопределенных интегралов:

10) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C,$$

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C = -\arccos\frac{x}{a}+C,$$

12) $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

Таблица неопределенных интегралов:

10) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C,$$

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C,$$

12) $$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

13) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Методы интегрирования

Методы интегрирования

Выделяют четыре основных метода интегрирования:

Выделяют четыре основных метода интегрирования:

1. Непосредственное интегрирование.

Методы интегрирования

Выделяют четыре основных метода интегрирования:

1. Непосредственное интегрирование.
2. Подведение под знак дифференциала.

Методы интегрирования

Выделяют четыре основных метода интегрирования:

1. Непосредственное интегрирование.
2. Подведение под знак дифференциала.
3. Замена переменной.

Выделяют четыре основных метода интегрирования:

1. Непосредственное интегрирование.
2. Подведение под знак дифференциала.
3. Замена переменной.
4. Интегрирование по частям.

Метод непосредственного интегрирования состоит в приведении данного интеграла к одному или нескольким табличным интегралам с помощью свойств неопределенного интеграла.

Пример:

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{свойство } 1: \\ \int (f+g)dx = \int f\,dx + \int g\,dx \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{свойство 1:} \\ \int (f+g)dx = \int f\,dx + \int g\,dx \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{свойство 1:} \\ \int (f+g)dx = \int f\,dx + \int g\,dx \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{свойство 1:} \\ \int (f+g)dx = \int f\,dx + \int g\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int 2\sin x\,dx + \int 9\,dx$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{свойство 1:} \\ \int (f+g)dx = \int f\,dx + \int g\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx$$

Пример:

$\int (2\sin x + 9)dx =$

$= \int 2\sin x dx + \int 9 dx$

Пример:

$\int (2\sin x + 9)dx =$

$= \int 2\sin x dx + \int 9 dx$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{свойство 2:} \\ \int (k \cdot f)dx = k \cdot \int fdx \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9 dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{свойство 2:} \\ \int (k \cdot f)dx = k \cdot \int f dx \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int {\color{red}2}\sin x dx + \int {\color{red}9} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{свойство 2:} \\ \int ({\color{red}k} \cdot f)dx = {\color{red}k} \cdot \int f dx \end{array} \right| =$$

$$= {\color{red}2}\int \sin x dx + {\color{red}9}\int dx$$

Методы интегрирования

Пример:

$$\int(2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9 dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{свойство 2:} \\ \int (k \cdot f) dx = k \cdot \int f dx \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx$$

Пример:

$\int(2\sin x+9)dx=$

$=\int 2\sin x dx+\int 9dx=$

$=2\int\sin x dx+9\int dx$

Пример:

$\int(2\sin x + 9)dx =$

$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$

$= 2\int \sin x dx + 9\int dx$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$
$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$
$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx$$

Методы интегрирования

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$

$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{табличные интегралы} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$

$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$

$$= \left| \text{табличные интегралы} \right|$$

Пример:

$$\int(2\sin x+9)dx=$$
$$=\int 2\sin x dx+\int 9dx=$$
$$=2\int \sin x dx+9\int dx=$$
$$=\left|\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \text{табличные интегралы} \\ \text{формула 6:} \\ \int \sin x dx=-\cos x+C_1 \end{array}\right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9 dx =$$

$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{табличные интегралы} \\ \text{формула 6:} \\ \int \sin x dx = -\cos x + C_1 \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$

$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\text{табличные интегралы}} \\ \text{формула 6:} & \text{формула 2:} \\ \int \sin x dx = -\cos x + C_1 & \int dx = x + C_2 \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$

$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\text{табличные интегралы}} \\ \text{формула 6:} & \text{формула 2:} \\ \int \sin x dx = -\cos x + C_1 & \int dx = x + C_2 \end{array} \right| =$$

$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2)$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9 dx =$$

$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\text{табличные интегралы}} \\ \text{формула 6:} & \text{формула 2:} \\ \int \sin x dx = -\cos x + C_1 & \int dx = x + C_2 \end{array} \right| =$$

$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2)$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$
$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$
$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$

$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2)$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$
$$= \int 2\sin x dx + \int 9 dx =$$
$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$

$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2)$$

Пример:

$\int (2\sin x + 9)dx =$

$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$

$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$

$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2)$

Пример:

$$\int(2\sin x + 9)dx =$$
$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$
$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$
$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2)$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$
$$= \int 2\sin x dx + \int 9 dx =$$
$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$
$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2) =$$
$$= -2\cos x + 2C_1 + 9x + 9C_2$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$
$$= \int 2\sin x dx + \int 9 dx =$$
$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$
$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2) =$$
$$= -2\cos x + 2C_1 + 9x + 9C_2 =$$
$$= \left|\text{полагаем: } 2C_1 + 9C_2 = C\right|$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$

$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$

$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$

$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2) =$$

$$= -2\cos x + 2C_1 + 9x + 9C_2 =$$

$$= \left|\text{полагаем: } 2C_1 + 9C_2 = C\right| =$$

$$= -2\cos x + 9x + C.$$

Пример:

$$\int(2\sin x+9)dx=$$
$$=\int 2\sin x dx+\int 9dx=$$
$$=2\int\sin x dx+9\int dx=$$
$$=2(-\cos x+C_1)+9(x+C_2)=$$
$$=-2\cos x+2C_1+9x+9C_2=$$
$$=\left|\text{полагаем: } 2C_1+9C_2=C\right|=$$
$$=-2\cos x+9x+C.$$

Пример:

$$\int(2\sin x + 9)dx =$$
$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$
$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$
$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2) =$$
$$= -2\cos x + 2C_1 + 9x + 9C_2 =$$

$$= -2\cos x + 9x + C.$$

Пример:

$$\int (2\sin x + 9)dx =$$
$$= \int 2\sin x dx + \int 9dx =$$
$$= 2\int \sin x dx + 9\int dx =$$
$$= 2(-\cos x + C_1) + 9(x + C_2) =$$
$$= -2\cos x + 2C_1 + 9x + 9C_2 =$$
$$= -2\cos x + 9x + C.$$

Методы подведения под знак дифференциала и замены переменной опираются на теорему о замене переменной.

Теорема (о замене переменной)

Теорема (о замене переменной)

Пусть функции $f(\varphi)$ и $\varphi(x)$ определены на интервалах (φ_1, φ_2) и (x_1, x_2), причем

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \subset (\varphi_1, \varphi_2).$$

Теорема (о замене переменной)

Пусть функции $f(\varphi)$ и $\varphi(x)$ определены на интервалах (φ_1, φ_2) и (x_1, x_2), причем

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \subset (\varphi_1, \varphi_2).$$

Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема на интервале (x_1, x_2)

Теорема (о замене переменной)

Пусть функции $f(\varphi)$ и $\varphi(x)$ определены на интервалах (φ_1, φ_2) и (x_1, x_2), причем

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \subset (\varphi_1, \varphi_2).$$

Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема на интервале (x_1, x_2) и

$$\int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C,$$

Теорема (о замене переменной)

Пусть функции $f(\varphi)$ и $\varphi(x)$ определены на интервалах (φ_1, φ_2) и (x_1, x_2), причем

$$(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \subset (\varphi_1, \varphi_2).$$

Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема на интервале (x_1, x_2) и

$$\int f(\varphi) d\varphi = F(\varphi) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C. \qquad (1)$$

Учитывая определение дифференциала

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx,$$

Учитывая определение дифференциала

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx,$$

в **методе подведения под знак дифференциала** формулу (1) переписывают в виде:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C. \qquad (2)$$

Данная формула используется следующим образом.

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти

$$\int g(x)dx.$$

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти
$$\int g(x)dx.$$
Самостоятельно подбирая $\varphi(x)$,

Методы интегрирования

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти

$$\int g(x)dx.$$

Самостоятельно подбирая $\varphi(x)$,
мы представляем функцию $g(x)$ в виде произведения двух функций $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$,

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти

$$\int g(x)dx.$$

Самостоятельно подбирая $\varphi(x)$,
мы представляем функцию $g(x)$ в виде произведения двух функций $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$,
после чего подводим $\varphi'(x)$ под знак дифференциала путем замены $\varphi'(x)dx$ на $d\varphi(x)$

Методы интегрирования

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти

$$\int g(x)dx.$$

Самостоятельно подбирая $\varphi(x)$,
мы представляем функцию $g(x)$ в виде произведения двух функций $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, после чего подводим $\varphi'(x)$ под знак дифференциала путем замены $\varphi'(x)dx$ на $d\varphi(x)$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$$

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти

$$\int g(x)dx.$$

Самостоятельно подбирая $\varphi(x)$,
мы представляем функцию $g(x)$ в виде произведения двух функций $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, после чего подводим $\varphi'(x)$ под знак дифференциала путем замены $\varphi'(x)dx$ на $d\varphi(x)$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx$$

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти

$$\int g(x)dx.$$

Самостоятельно подбирая $\varphi(x)$,
мы представляем функцию $g(x)$ в виде произведения двух функций $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$,
после чего подводим $\varphi'(x)$ под знак дифференциала путем замены $\varphi'(x)dx$ на $d\varphi(x)$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)}$$

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти

$$\int g(x)dx.$$

Самостоятельно подбирая $\varphi(x)$,
мы представляем функцию $g(x)$ в виде произведения двух функций $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, после чего подводим $\varphi'(x)$ под знак дифференциала путем замены $\varphi'(x)dx$ на $d\varphi(x)$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти

$$\int g(x)dx.$$

Самостоятельно подбирая $\varphi(x)$,
мы представляем функцию $g(x)$ в виде произведения двух функций $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, после чего подводим $\varphi'(x)$ под знак дифференциала путем замены $\varphi'(x)dx$ на $d\varphi(x)$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

Методы интегрирования

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

Методы интегрирования

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

Методы интегрирования

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

Заменив в получившемся интеграле функцию $\varphi(x)$ на промежуточную переменную φ,

Методы интегрирования

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x).$$

Заменив в получившемся интеграле функцию $\varphi(x)$ на промежуточную переменную φ, приходим к табличному интегралу, который находим по таблице

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x).$$

Заменив в получившемся интеграле функцию $\varphi(x)$ на промежуточную переменную φ, приходим к табличному интегралу, который находим по таблице:

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi}$$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x).$$

Заменив в получившемся интеграле функцию $\varphi(x)$ на промежуточную переменную φ, приходим к табличному интегралу, который находим по таблице:

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi$$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x).$$

Заменив в получившемся интеграле функцию $\varphi(x)$ на промежуточную переменную φ, приходим к табличному интегралу, который находим по таблице:

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi$$

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x).$$

Заменив в получившемся интеграле функцию $\varphi(x)$ на промежуточную переменную φ, приходим к табличному интегралу, который находим по таблице:

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi$$

Методы интегрирования

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x).$$

Заменив в получившемся интеграле функцию $\varphi(x)$ на промежуточную переменную φ, приходим к табличному интегралу, который находим по таблице:

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi)d\varphi$$

Методы интегрирования

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot\underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x).$$

Заменив в получившемся интеграле функцию $\varphi(x)$ на промежуточную переменную φ, приходим к табличному интегралу, который находим по таблице:

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C.$$

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C.$$

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C.$$

Методы интегрирования

$$\int f(\varphi(x)) \cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi) \cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi) d\varphi = F(\varphi) + C.$$

Методы интегрирования

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C.$$

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C.$$

Наконец, в итоговом выражении

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C.$$

Наконец, в итоговом выражении переходим обратно от промежуточной переменной φ к независимой переменной x: $\varphi \to \varphi(x)$.

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C.$$

Наконец, в итоговом выражении переходим обратно от промежуточной переменной φ к независимой переменной x: $\varphi \to \varphi(x)$.

Методы интегрирования

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi =$$

$$= \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi) + C.$$

Наконец, в итоговом выражении переходим обратно от промежуточной переменной φ к независимой переменной x: $\varphi \to \varphi(x)$. Тогда

$$\int g(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Пример:

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \cos x dx$$

Методы интегрирования

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin x} \cos x dx =$$

$$= \left| \qquad \qquad \right|$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\underbrace{\sin x}_{\varphi(x)}} \cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\underbrace{\sin x}_{\varphi(x)}} \overbrace{\cos x}^{\varphi'(x)} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\underbrace{\sin x}_{\varphi(x)}} \overbrace{\cos x}^{\varphi'(x)} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x) dx \\ \\ \\ \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\underbrace{\sin x}_{\varphi(x)}} \underbrace{\overbrace{\cos x}^{\varphi'(x)} dx}_{d \sin x} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x) dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d \sin x = \cos x dx \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\underbrace{\sin x}_{\varphi(x)}} \overbrace{\underbrace{\cos x dx}_{d\sin x}}^{\varphi'(x)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x) dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\underbrace{\sin x}_{\varphi(x)}} \overbrace{\underbrace{\cos x dx}_{d\sin x}}^{\varphi'(x)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x) dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\underbrace{\sin x}_{\varphi(x)}} \overbrace{\underbrace{\cos x dx}_{d \sin x}}^{\varphi'(x)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x) dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d \sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d \sin x$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x)dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x)dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x)dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x)dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x)dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right|$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x)dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x)dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = \sin x, \\ \varphi'(x) = \cos x \\ d\varphi(x) = \varphi'(x)dx \\ \qquad\qquad \Downarrow \\ d\sin x = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin x} d\sin x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

Пример:

$$= \left| \begin{matrix} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{формула 5} \\ \text{таблицы} \\ \text{неопределенных} \\ \text{интегралов} \end{array} \right|$$

Пример:

$$= \left| \begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{формула 5} \\ \text{таблицы} \\ \text{неопределенных} \\ \text{интегралов} \end{array} \right| = \ln|\varphi| + C$$

Пример:

$$= \left| \begin{matrix} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{формула 5} \\ \text{таблицы} \\ \text{неопределенных} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right| = \ln|\varphi| + C =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{переходим} \\ \text{от } \varphi \text{ к } x \end{matrix} \right|$$

Пример:

$$= \left|\begin{array}{l} \text{обозначим} \\ \varphi = \sin x \end{array}\right| = \int \frac{1}{\varphi} d\varphi =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{формула 5} \\ \text{таблицы} \\ \text{неопределенных} \\ \text{интегралов} \end{array}\right| = \ln|\varphi| + C =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{переходим} \\ \text{от } \varphi \text{ к } x \end{array}\right| = \ln|\sin x| + C.$$

В **методе замены переменной** формула (1) приобретает вид

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))d\varphi(t). \qquad (3)$$

В **методе замены переменной** формула (1) приобретает вид

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))d\varphi(t). \qquad (3)$$

Здесь мы переходим от переменной x к новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$ по формуле (3), причем функция $\varphi(t)$ выбирается так, чтобы новый интеграл был проще исходного.

Пример:

Пример:

$\int \cos(2x-3)dx$

Пример:

$\int \cos(2x-3)dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{полагаем } t = 2x-3, \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Пример:

$\int \cos(2x-3)dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{полагаем } t = 2x - 3, \\ \text{тогда} \\ x = \varphi(t) = (t+3)/2, \\ \\ \end{array} \right.$$

Методы интегрирования

Пример:

$\int \cos(2x-3)dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{полагаем } t = 2x-3, \\ \text{тогда} \\ x = \varphi(t) = (t+3)/2, \\ dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt = dt/2 \end{array} \right|$$

Пример:

$$\int \cos(2x-3)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{полагаем } t = 2x-3, \\ \text{тогда} \\ x = \varphi(t) = (t+3)/2, \\ dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt = dt/2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos t \frac{dt}{2}$$

Пример:

$$\int \cos(2x-3)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{полагаем } t = 2x-3, \\ \text{тогда} \\ x = \varphi(t) = (t+3)/2, \\ dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt = dt/2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \cos t dt$$

Пример:

$\int \cos(2x-3)dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{полагаем } t = 2x - 3, \\ \text{тогда} \\ x = \varphi(t) = (t+3)/2, \\ dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt = dt/2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C$$

Пример:

$\int \cos(2x-3)dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{полагаем } t = 2x-3, \\ \text{тогда} \\ x = \varphi(t) = (t+3)/2, \\ dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt = dt/2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C =$$

$$= \left| t \to 2x-3 \right|$$

Пример:

$$\int \cos(2x-3)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{полагаем } t = 2x-3, \\ \text{тогда} \\ x = \varphi(t) = (t+3)/2, \\ dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt = dt/2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C =$$

$$= \left| t \to 2x-3 \right| = \frac{1}{2}\sin(2x-3) + C.$$

Метод интегрирования по частям описывается в следующей теореме.

Метод интегрирования по частям
описывается в следующей теореме.

Теорема (интегрирование по частям)

Метод интегрирования по частям описывается в следующей теореме.

Теорема (интегрирование по частям)
Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b), и на этом интервале существует $\int v du$, то

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Интегралы, берущиеся по частям:

Интегралы, берущиеся по частям:

1. Интегралы первого типа

Интегралы, берущиеся по частям:

1. Интегралы первого типа

$$\int P_n(x)\cos(ax)dx,$$

Интегралы, берущиеся по частям:

1. Интегралы первого типа

$$\int P_n(x)\cos(ax)dx,$$
$$\int P_n(x)\sin(ax)dx,$$

Интегралы, берущиеся по частям:

1. Интегралы первого типа

$$\int P_n(x)\cos(ax)dx,$$
$$\int P_n(x)\sin(ax)dx,$$
$$\int P_n(x)e^{ax}dx.$$

Интегралы, берущиеся по частям:

1. Интегралы первого типа

$$\int P_n(x)\cos(ax)dx,$$

$$\int P_n(x)\sin(ax)dx,$$

$$\int P_n(x)e^{ax}dx.$$

Полагаем $u = P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, а за dv берем все остальное.

Интегралы, берущиеся по частям:

2. Интегралы второго типа

Интегралы, берущиеся по частям:

2. Интегралы второго типа

$$\int P_n(x)\ln(ax)dx,$$

Интегралы, берущиеся по частям:

2. Интегралы второго типа

$$\int P_n(x)\ln(ax)dx,$$
$$\int P_n(x)\arcsin(ax)dx,$$

Интегралы, берущиеся по частям:

2. Интегралы второго типа

$$\int P_n(x)\ln(ax)dx,$$
$$\int P_n(x)\arcsin(ax)dx,$$
$$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}(ax)dx.$$

Интегралы, берущиеся по частям:

2. Интегралы второго типа

$$\int P_n(x)\ln(ax)dx,$$
$$\int P_n(x)\arcsin(ax)dx,$$
$$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}(ax)dx.$$

Полагаем $dv = P_n(x)dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, а за u берем все остальное.

Интегралы, берущиеся по частям:

3. Интегралы третьего типа

Интегралы, берущиеся по частям:

3. Интегралы третьего типа

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx,$$

Интегралы, берущиеся по частям:

3. Интегралы третьего типа

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx,$$
$$\int e^{ax}\sin(bx)dx.$$

Интегралы, берущиеся по частям:

3. Интегралы третьего типа

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx,$$
$$\int e^{ax}\sin(bx)dx.$$

Формулу интегрирования по частям применяем последовательно два раза, в обоих случаях полагаем $u = e^{ax}$.

Интегралы, берущиеся по частям:

3. Интегралы третьего типа

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx,$$
$$\int e^{ax}\sin(bx)dx.$$

Формулу интегрирования по частям применяем последовательно два раза, в обоих случаях полагаем $u = e^{ax}$. Из получающегося в результате уравнения выражаем исходный интеграл.

Пример:

Пример:

$\int x \cos x dx$

Пример:

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ & \end{array} \right.$$

Пример:

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{vmatrix}$$

Пример:

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{x}_{u} \cdot \overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{\sin x}^{v} \underbrace{dx}_{du}$$

Пример:

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{x}_{u} \cdot \overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{\sin x}^{v} \underbrace{dx}_{du} =$$

$$= x\sin x - (-\cos x) + C$$

Пример:

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{x}_{u} \cdot \overbrace{\sin x}^{v} - \int \overbrace{\sin x}^{v} \underbrace{dx}_{du} =$$

$$= x\sin x - (-\cos x) + C =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$