Интегралы и дифференциальные уравнения Модуль 1
Неопределенный интеграл
Лекция 1.2
(для ГУИМЦ, 2025)

Аннотация

Рациональные дроби. Четыре типа простейших рациональных дробей. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами и методы нахождения этих коэффициентов. Интегрирование простейших рациональных дробей. Общее правило интегрирования произвольной рациональной дроби.

1 Рациональные дроби

Определение

Рациональной дробью или **рациональной функцией** называется отношение двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}.$$

Определение

Рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Пример: $\dfrac{x^2+3x+4}{x^3-4x^2+5x-2}$.

Определение

Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, больше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе.

Пример: $\dfrac{x^3+2x^2-3x-1}{x-4}$.

Теорема (о переходе от неправильной рациональной дроби к правильной)

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример: Пусть дана неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6}.$$

Разделим числитель этой дроби на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l} -\;\; x^3+x^2+3x+4 & x^2+x-6 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+x^2-6x} & x \\ 9x+4 & \end{array}$$

В результате исходная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{x^3+x^2+3x+4}{x^2+x-6} = x + \frac{9x+4}{x^2+x-6}.$$

Определение

Простейшими (элементарными) рациональными дробями называют дроби четырех типов:

$$(1)\ \frac{1}{x-a},\ (2)\ \frac{1}{(x-a)^n},\ (3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ (4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

где $D = p^2-4q < 0$, т.е. x^2+px+q неразложим на множители, $n \geq 2$, $m \geq 2$.

Теорема (о разложении правильной рациональной дроби)

Любую правильную рациональную дробь $P_n(x)/Q_m(x)$, у которой

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot ... \cdot (x-b)^{\beta} \cdot (x^2+px+q)^{\gamma} \cdot ... \cdot (x^2+rx+s)^{\delta},$$

можно представить в виде суммы простейших дробей по правилу

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + ... +$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + ... + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{M_{\gamma}x+N_{\gamma}}{(x^2+px+q)^{\gamma}} + ... +$$

$$+ \frac{K_1x+L_1}{x^2+rx+s} + \frac{K_2x+L_2}{(x^2+rx+s)^2} + ... + \frac{K_{\delta}x+L_{\delta}}{(x^2+rx+s)^{\delta}}.$$

Коэффициенты разложения A_1, A_2, ..., K_{δ}, L_{δ} находятся с помощью двух методов - **метода частных значений** и **метода неопределенных коэффициентов**. Рассмотрим эти методы на примерах.

Пример: Разложить дробь

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

на сумму простейших дробей.

В числителе нашей дроби стоит многочлен второй степени, в знаменателе - многочлен третьей степени. Степень числителя меньше степени знаменателя. Значит, дробь правильная, и к ней применима теорема о разложении правильной рациональной дроби, согласно которой

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Поскольку знаменатели обеих дробей равны, то должны быть равны и их числители:

$$x^2+1=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2).\ (*)$$

Равенство $(*)$ справедливо при любых значениях переменной x. Поэтому в **методе частных значений** мы придаем переменной x три произвольных значения и подставляем их в $(*)$. В результате получаются три равенства

$$x=1\rightarrow(*):2=2\cdot A+0\cdot B+0\cdot C \text{ или } 2=2\cdot A,$$
$$x=2\rightarrow(*):5=0\cdot A-1\cdot B+0\cdot C \text{ или } 5=-1\cdot B,$$
$$x=3\rightarrow(*):10=0\cdot A+0\cdot B+2\cdot C \text{ или } 10=2\cdot C,$$

из которых находятся неизвестные коэффициенты:

$$A=1,\ B=-5,\ C=5.$$

В **методе неопределенных коэффициентов** мы раскрываем скобки в правой части равенства $(*)$ и группируем члены с одинаковыми степенями:

$$x^2+1=(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2C).$$

Два многочлена равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях. Отсутствие x слева в равенстве означает, что коэффициент при нем равен нулю:

$$1\cdot x^2-0\cdot x+1=(A+B+C)x^2-(5A+4B+3C)x+(6A+3B+2C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях слева и справа в равенстве, получаем

$$A+B+C=1,$$
$$5A+4B+3C=0,$$
$$6A+3B+2C=1,$$

откуда находим, что

$$A=1,\ B=-5,\ C=5.$$

Обратим внимание, что оба метода всегда дают одни и те же значения для коэффициентов разложения правильной дроби.

Тогда разложение исходной дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}-\frac{5}{x-2}+\frac{5}{x-3}.$$

2 Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование первых двух типов простейших дробей проводится методом подведения под знак дифференциала с учетом, что

$$d(x-a) = (x-a)' \cdot dx = 1 \cdot dx = dx.$$

Для простейшей дроби **первого типа** имеем

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{x-a} = \int \frac{d\varphi}{\varphi} = \ln|\varphi| + C = \ln|x-a| + C.$$

Для простейшей дроби **второго типа** имеем

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(\overbrace{x-a}^{\varphi})}{(x-a)^n} = \int \frac{d\varphi}{\varphi^n} = \int \varphi^{-n} d\varphi =$$

$$= \frac{\varphi^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C, n \geq 2.$$

При интегрировании простейшей дроби **третьего типа**

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$$

сначала в знаменателе выделяется полный квадрат:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} + q =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{a^2} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

а затем применяется метод подведения под знак дифференциала:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} dx =$$

$$= \int \frac{M(x+\frac{p}{2}) + \overbrace{N - M\cdot\frac{p}{2}}^{B}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} d(\underbrace{x+\frac{p}{2}}_{\varphi}) = \int \frac{M\varphi + B}{\varphi^2 + a^2} d\varphi =$$

$$= M\int \frac{\varphi}{\varphi^2+a^2}d\varphi + B\int \frac{1}{\varphi^2+a^2}d\varphi =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2\varphi d\varphi}{\varphi^2+a^2} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(\varphi^2+a^2)}{\underbrace{\varphi^2+a^2}_{u}} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{du}{u} + B\int \frac{d\varphi}{\varphi^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|u| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|\varphi^2+a^2| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\varphi}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|(x+\frac{p}{2})^2+a^2| + B\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C,$$

где $a^2 = q - p^2/4$, $B = N - M\cdot p/2$.

Интегрирование простейшей дроби **четвертого типа**

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, m \geq 2$$

представляет собой довольно трудоемкий процесс, требующий привлечения специально выводимой рекуррентной формулы. Подробное описание процесса интегрирования дробей этого типа при необходимости можно найти в справочной литературе.

3 Интегрирование произвольных рациональных дробей

Универсальный алгоритм интегрирования произвольной рациональной дроби включает три шага:

1. Представляем неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

2. Правильную рациональную дробь раскладываем на сумму простейших дробей.

3. Интегрируем многочлен и полученные простейшие дроби.

