Интегралы и дифференциальные уравнения
Модуль 1
Неопределенный интеграл
Лекция 1.1
(для ГУИМЦ, 2025)

Аннотация

Первообразная функции и ее свойства. Неопределенный интеграл и его свойства. Методы нахождения неопределенного интеграла: непосредственное интегрирование, подведение под знак дифференциала, замена переменной, интегрирование по частям.

1 Неопределенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b).

Определение

Функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ дифференцируема на этом интервале и

$$\forall x \in (a, b)\ F'(x) = f(x).$$

Свойства первообразной

1. Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ на интервале (a, b), то $F(x) + C$, где C - некоторая постоянная, тоже является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b).

2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные функции $f(x)$ на интервале (a, b), то на этом интервале они отличаются лишь на некоторую постоянную, т.е.

$$F_1(x) - F_2(x) = C,\ C = const.$$

Определение

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Обозначение: $\int f(x) \cdot dx$, $\int f(x)dx$.

Определение

Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**.

Если $F(x)$ - какая-либо первообразная функции $f(x)$, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная. Выражение $F(x) + C$ обозначает множество всех первообразных функции $f(x)$. Каждая конкретная первообразная выбирается из этого множества путем придания произвольной постоянной C конкретного значения.

Под выражением $\int f(x)dx$ иногда понимается не вся совокупность первообразных, а только какая-то одна произвольная первообразная, если нет необходимости ее конкретизировать путем выбора определенного значения C.

Замечание

В неопределенном интеграле независимая переменная может обозначаться любым способом. Например, интегралы

$$\int f(x)dx,\ \int f(t)dt,\ \int f(u)du$$

идентичны с точностью до обозначения независимой переменной.

Определение

Процесс нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется **интегрированием**.

Теорема (достаточное условие существования неопр. интеграла)

Функция, непрерывная на заданном интервале, имеет на этом интервале первообразную, а значит, и неопределенный интеграл.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
2. $\int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx,\ k = const.$

Таблица неопределенных интегралов:

1) $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,$

2) $\displaystyle\int dx = x + C,$

3) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

4) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C,$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

6) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C,$

7) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C,$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C,$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C,$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

2 Методы интегрирования

Выделяют четыре основных метода интегрирования:

1. Непосредственное интегрирование.
2. Подведение под знак дифференциала.
3. Замена переменной.
4. Интегрирование по частям.

Метод непосредственного интегрирования состоит в приведении данного интеграла к одному или нескольким табличным интегралам с помощью свойств неопределенного интеграла.

Пример:

$\int(2\sin x+9)dx=$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{используем свойство 1:}\\ \int(f+g)dx=\int f dx+\int g dx\end{array}\right|=\int 2\sin x dx+\int 9dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{используем свойство 2:}\\ \int(k\cdot f)dx=k\cdot\int f dx\end{array}\right|=2\int\sin x dx+9\int dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{таблица неопр. интегралов:}\\ \int\sin x dx=-\cos x+C_1\\ \int dx=x+C_2\end{array}\right|=2(-\cos x+C_1)+9(x+C_2)=$$
$$=-2\cos x+2C_1+9x+9C_2=$$

$$=|\text{полагаем: } 2C_1+9C_2=C|=-2\cos x+9x+C.$$

Методы подведения под знак дифференциала и замены переменной опираются на теорему о замене переменной.

Теорема (о замене переменной)

Пусть функции $f(\varphi)$ и $\varphi(x)$ определены на интервалах (φ_1,φ_2) и (x_1,x_2), причем $(\varphi(x_1),\varphi(x_2))\subset(\varphi_1,\varphi_2)$. Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема на интервале (x_1,x_2) и

$$\int f(\varphi)d\varphi=F(\varphi)+C,$$

то

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))+C. \qquad (1)$$

Учитывая определение дифференциала

$$d\varphi(x)=\varphi'(x)dx,$$

в **методе подведения под знак дифференциала** формулу (1) переписывают в виде:

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)=F(\varphi(x))+C. \qquad (2)$$

Данная формула используется следующим образом. Допустим, нам надо найти

$$\int g(x)dx.$$

Самостоятельно подбирая $\varphi(x)$, мы представляем функцию $g(x)$ в виде произведения двух функций $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, после чего подводим $\varphi'(x)$ под знак дифференциала путем замены $\varphi'(x)dx$ на $d\varphi(x)$:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\cdot \underbrace{\varphi'(x)dx}_{d\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x).$$

Заменив в получившемся интеграле функцию $\varphi(x)$ на промежуточную переменную φ, приходим к табличному интегралу, который находим по таблице:

$$\int f(\varphi(x))\cdot d\varphi(x)\Big|_{\varphi(x)=\varphi} = \int f(\varphi)\cdot d\varphi = \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi)+C.$$

Наконец, в итоговом выражении переходим обратно от промежуточной переменной φ к независимой переменной x: $\varphi \to \varphi(x)$. Тогда

$$\int g(x)dx = F(\varphi(x))+C.$$

Пример:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin x}\cos x dx =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{полагаем } \varphi(x)=\sin x,\\ \text{тогда } \varphi'(x)=\cos x\end{matrix}\right| = \int \frac{1}{\underbrace{\sin x}_{\varphi(x)}}\overbrace{\cos x}^{\varphi'(x)}dx =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{поскольку } d\varphi(x)=\varphi'(x)dx,\\ \text{то } d\sin x=\cos x dx\end{matrix}\right| = \int \frac{1}{\sin x}\underbrace{\cos x dx}_{d\sin x} =$$

$$= \left|\text{заменяем } \cos x dx \text{ на } d\sin x\right| = \int \frac{1}{\sin x}d\sin x =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{обозначим}\\ \varphi=\sin x\end{matrix}\right| = \int \frac{1}{\varphi}d\varphi = \left|\begin{matrix}\text{используем формулу 5}\\ \text{таблицы неопр. интегралов}\end{matrix}\right| =$$

$$= \ln|\varphi| + C = \left|\text{переходим от } \varphi \text{ к } x\right| = \ln|\sin x| + C.$$

В **методе замены переменной** формула (1) приобретает вид

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))d\varphi(t). \tag{3}$$

Здесь мы переходим от переменной x к новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$ по формуле (3), причем функция $\varphi(t)$ выбирается так, чтобы новый интеграл был проще исходного.

Пример:

$$\int \cos(2x-3)dx = \begin{vmatrix} \text{полагаем } t = 2x-3, \text{ тогда} \\ x = \varphi(t) = (t+3)/2, \\ dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt = dt/2 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{делаем обратную} \\ \text{замену } t \to 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin(2x-3) + C.$$

Метод интегрирования по частям описывается в следующей теореме.

Теорема (интегрирование по частям)

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b), и на этом интервале существует $\int vdu$, то

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Интегралы, берущиеся по частям:

1. Интегралы первого типа

$$\int P_n(x)\cos(ax)dx,\ \int P_n(x)\sin(ax)dx,\ \int P_n(x)e^{ax}dx.$$

Полагаем $u = P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, а за dv берем все остальное.

2. Интегралы второго типа

$$\int P_n(x)\ln(ax)dx,\ \int P_n(x)\arcsin(ax)dx,\ \int P_n(x)\,\mathrm{arctg}(ax)dx.$$

Полагаем $dv = P_n(x)dx$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n, а за u берем все остальное.

3. Интегралы третьего типа

$$\int e^{ax}\cos(bx)dx,\ \int e^{ax}\sin(bx)dx.$$

Формулу интегрирования по частям применяем последовательно два раза, в обоих случаях полагаем $u = e^{ax}$. Из получающегося в результате уравнения выражаем исходный интеграл.

Пример:

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{x}_{u} \cdot \overbrace{\sin x} ^{v} - \int \overbrace{\sin x}^{v} \underbrace{dx}_{du} = x\sin x - (-\cos x) + C =$$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$