Аналитическая геометрия
Модуль 1
Матричная алгебра. Векторная алгебра
Текст 1.4
(для ГУИМЦ, 2024)

Аннотация

Базис, виды базисов. Координаты вектора в произвольном базисе. Ортогональная проекция вектора на ось и ее свойства. Координаты вектора в ортонормированном базисе и их свойства. Действия над векторами, заданными своими координатами. Скалярное произведение и его приложения.

1 Базис

Определение

Базисом заданного множества векторов называется любая упорядоченная совокупность линейно независимых векторов этого множества, обладающая тем свойством, что любой вектор этого множества можно представить в виде их линейной комбинации.

Базис на плоскости образуют любые два линейно независимые вектора, лежащие в этой плоскости.

Базис в пространстве составляют любые три линейно независимые вектора этого пространства.

Из рассмотренных ранее свойств систем линейно зависимых и независимых векторов следует, что любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, а любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

Определение

Базис называется **ортогональным**, если он состоит из попарно ортогональных векторов. Базис называется **ортонормированным**, если он состоит из попарно ортогональных единичных векторов.

Пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют базис в пространстве. Тогда любой вектор $\vec{x}$ данного пространства можно представить в виде линейной комбинации этих векторов

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3.$$

Такое представление вектора $\vec{x}$ называется **разложением вектора $\vec{x}$ в базисе** $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, а числа α_1, α_2, α_3 называются **координатами вектора $\vec{x}$ в этом базисе**.

2 Ортогональная проекция вектора на ось

Определение

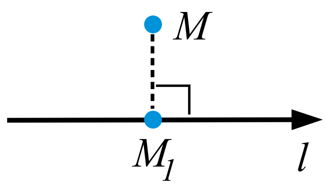
Осью называется прямая с указанными на ней направлением, началом отсчета O и выбранной масштабной единицей.

Обозначение: l.

Определение

Ортогональной проекцией (или просто **проекцией**) **точки** M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки M на эту ось.

Обозначение: $\text{пр}_l M$.

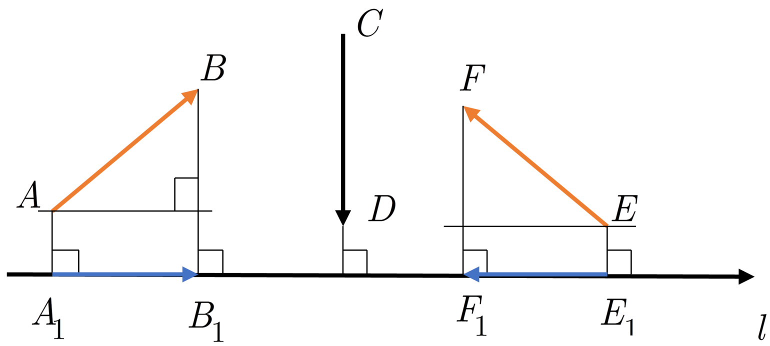


Пусть задан вектор $\overrightarrow{AB}$ и пусть A_1 - проекция точки A, B_1 - проекция точки B на ось l.

Определение

Ортогональной проекцией (или просто **проекцией**) **вектора** $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены.

Обозначение: $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$



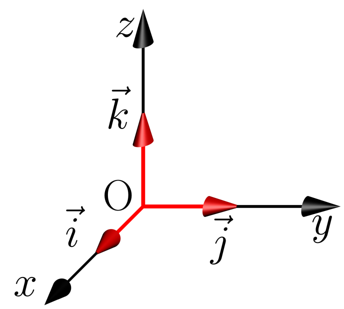
На рисунке $\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A_1B_1}|$, $\text{пр}_l\overrightarrow{CD} = 0$, $\text{пр}_l\overrightarrow{EF} = -|\overrightarrow{E_1F_1}|$.

Основные свойства проекций:

1. $\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\ l})$.
2. $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b}$.
3. $\text{пр}_l(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_l\vec{a}$, $\alpha \in R$.

3 Координаты вектора в ортонормированном базисе

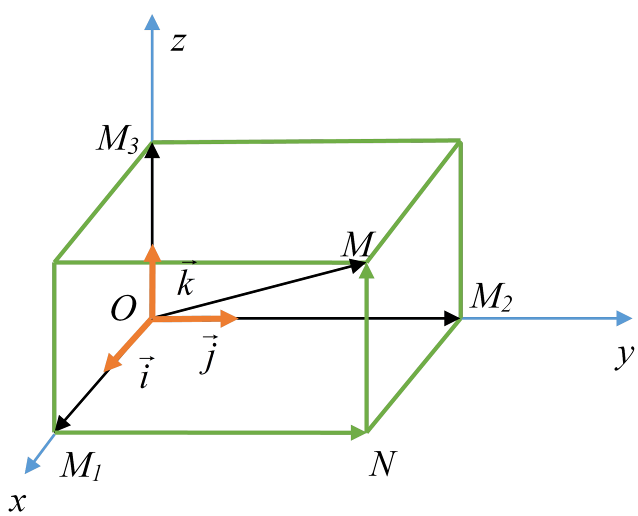
Любая декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ определяется в пространстве заданием ортонормированного базиса и точки приложения векторов этого базиса (точки O). В этом случае базис называют **декартовым прямоугольным базисом**, а его векторы обозначаются как $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, причем $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, $\vec{i}\perp\vec{j}$, $\vec{i}\perp\vec{k}$, $\vec{j}\perp\vec{k}$.



Зафиксируем в пространстве некоторую декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$ и соответствующий ей ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Далее выберем произвольную точку M и построим вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Проведем через точку M плоскости, параллельные координатным плоскостям. Эти плоскости пересекают оси Ox, Oy, Oz в точках M_1, M_2 и M_3. Тогда по определению проекции вектора на ось имеем:

$$\text{пр}_x\vec{a} = |\overrightarrow{OM_1}|, \; \text{пр}_y\vec{a} = |\overrightarrow{OM_2}|, \; \text{пр}_z\vec{a} = |\overrightarrow{OM_3}|,$$

где $\text{пр}_x\vec{a}$, $\text{пр}_y\vec{a}$, $\text{пр}_z\vec{a}$ - проекции вектора $\vec{a}$ на оси Ox, Oy, Oz, соответственно.



По определению суммы нескольких векторов находим:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}.$$

Т.к.

$$\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2},\ \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3},$$

то

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Далее,

$$\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i} = \text{пр}_x\vec{a} \cdot \vec{i},$$
$$\overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j} = \text{пр}_y\vec{a} \cdot \vec{j},$$
$$\overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k} = \text{пр}_z\vec{a} \cdot \vec{k}.$$

Обозначим:

$$a_x = \text{пр}_x\vec{a},\ a_y = \text{пр}_y\vec{a},\ a_z = \text{пр}_z\vec{a}.$$

Тогда получаем **разложение вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$** или, что то же самое, **по ортам координатных осей** Ox, Oy и Oz:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z - координаты вектора $\vec{a}$ в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Геометрически эти координаты есть проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат Ox, Oy и Oz, соответственно.

Разложение вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ кратко можно записать в виде

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Замечание

Указанная краткая форма записи разложения вектора используется **только** для базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Из теоремы о диагонали прямоугольного параллелепипеда следует:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Отсюда

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. По определению проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Откуда

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Определение

Величины $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$, а углы α, β, γ - **направляющими углами** вектора $\vec{a}$.

Свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Координаты орта вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}^{\,0} = \vec{a}/|\vec{a}| = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Действия над векторами в координатной форме:

Пусть даны векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

1. При сложении векторов их одноименные координаты складываются:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

2. При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это число:

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z).$$

3. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z.$$

4. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны:

$$\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

5. Координаты вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала. Если даны $A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

4 Скалярное произведение векторов

Определение

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$.

Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Определение

Величину $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{a}^{\,2}$.

Алгебраические свойства скалярного произведения:

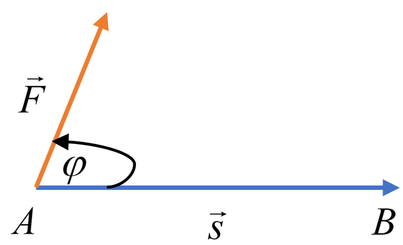
1) коммутативный закон
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},$$
2) дистрибутивный закон
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},$$
3) ассоциативный закон относительно числового множителя
$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ \lambda\in R.$$

Геометрическое свойство скалярного произведения:

Скалярное произведение двух векторов равняется нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны, т.е.
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$$

Механический смысл скалярного произведения:

Пусть материальная точка перемещается из положения A в положение B под действием постоянной силы $\vec{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overrightarrow{AB}=\vec{s}$.



Из физики известно, что работа A постоянной силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ равна

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi,$$

или

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Таким образом, *механический смысл скалярного произведения* есть работа постоянной силы по перемещению материальной точки.

Теорема (скалярное произведение в координатной форме)

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\ .$$

Приложения скалярного произведения:

1. Угол между векторами.

Угол φ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

2. Проекция вектора на заданное направление.

Учитывая определение проекции вектора на ось, формулу скалярного произведения векторов можно записать в виде:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a},$$

где $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ – проекция вектора $\vec{a}$ на направление, задаваемое вектором $\vec{b}$, или, другими словами, на ось, сонаправленную с вектором $\vec{b}$.

Следовательно, например, проекция вектора $\vec{a}$ на направление, задаваемое вектором $\vec{b}$, может быть вычислена по формуле:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

3. Модуль вектора.

Модуль вектора $\vec{a}$ можно вычислить с помощью скалярного квадрата по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}.$$

Примеры:

I. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин $A(-4;-4;4)$, $B(-3;2;2)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;2)$ взаимно перпендикулярны.

Решение.

Составим векторы, лежащие на диагоналях четырехугольника $ABCD$:

$$\overrightarrow{AC} = (2-(-4);5-(-4);1-4) = (6;9;-3),$$
$$\overrightarrow{BD} = (3-(-3);-2-2;2-2) = (6;-4;0).$$

Найдем их скалярное произведение:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (6;9;-3)\cdot(6;-4;0) = 6\cdot 6 + 9\cdot(-4) + (-3)\cdot 0 = 0.$$

Следовательно, из геометрического свойства скалярного произведения делаем вывод, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ взаимно ортогональны, а значит, диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны.

II. Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F} = (3;2;4)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2;-4;6)$ в положение $B(4;2;7)$. Под каким углом к $\overrightarrow{AB}$ направлена сила $\vec{F}$?

Решение.

Найдем вектор

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (4-2;2-(-4);7-6) = (2;6;1),$$

тогда

$$A = \vec{F}\cdot\vec{s} = 3\cdot 2 + 2\cdot 6 + 4\cdot 1 = 22 \text{ (ед. работы)}$$

и

$$\cos\varphi = \frac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{22}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+6^2+1^2}} = \frac{22}{\sqrt{1189}}.$$

Ответ: $A = 22$ ед. работы, $\varphi = \arccos\dfrac{22}{\sqrt{1189}}$.