Аналитическая геометрия
Модуль 1
Матричная алгебра. Векторная алгебра
Текст 1.3
(для ГУИМЦ, 2024)

Аннотация

Однородные системы линейных алгебраических уравнений: вид, критерий существования ненулевых решений, фундаментальная система решений, структура общего решения. Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений: структура общего решения.

1 Однородные системы линейных алгебраических уравнений

Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

или

$$AX = O.$$

Однородная система всегда совместна и всегда имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Теорема (критерий существования ненулевых решений однородной системы)

Для того чтобы однородная система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных.

В случае, когда матрица однородной системы A квадратная, из теоремы следует:

1) если $\det A \neq 0$, то система имеет единственное нулевое решение;

2) если $\det A = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

Пример: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Используем метод Гаусса.

Прямой ход

1. Приводим матрицу системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 13 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаны следующие элементарные преобразования:

(1) из второй строки вычли первую строку, умноженную на 2, и из третьей строки вычли первую строку, умноженную на 4,

(2) из третьей строки вычли вторую строку.

Заметим, что у однородной системы нет необходимости рассматривать расширенную матрицу $\widetilde{A}$, т.к. для любой однородной системы всегда выполняется равенство $r(A) = r(\widetilde{A})$, и нулевой столбец свободных членов O остается нулевым при любых элементарных преобразованиях.

2. Находим ранг матрицы системы и определяем количество решений. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в итоговой ступенчатой матрице из пункта 1. В нашем случае ранг матрицы $r(A) = 2$. Поскольку число неизвестных $n = 3$ и $r(A) < n$, то система уравнений является неопределенной, т.е. имеет бесконечное мно-

жество решений.

3. Формируем базисный минор итоговой ступенчатой матрицы из пункта 1. Поскольку $r(A) = 2$, то он должен иметь второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов:

$$M_2^{(\text{б})} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Важно убедиться, что данный минор отличен от нуля. Если бы он оказался равен нулю, то нам необходимо было бы выбрать другие столбцы для формирования базисного минора.

4. Определяем базисные неизвестные. Поскольку мы включили в базисный минор первый и второй столбцы ступенчатой матрицы, то базисными неизвестными будут x_1 и x_2. Оставшаяся неизвестная x_3 будет свободной.

5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ \qquad -5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

6. Полагаем, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c – произвольная постоянная, и переносим в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -4c, \\ \qquad -5x_2 = 3c. \end{cases}$$

Обратный ход

7. Начиная с последнего уравнения системы, находим выражения базисных неизвестных x_1 и x_2 через свободную:

$$x_2 = -3c/5 = -0.6c,$$
$$x_1 = -4c - 3x_2 = -4c + 1.8c = -2.2c.$$

8. Выписываем общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -2.2c, \\ x_2 = -0.6c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Замечание

Часто решения систем линейных алгебраических уравнений записывают не в координатной форме, а в виде вектор-столбцов. Например, найденное выше общее решение, записанное в координатной форме, можно переписать так:

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} -2.2c \\ -0.6c \\ c \end{pmatrix}.$$

Придавая произвольной постоянной c какое-либо значение, можно из общего решения получить то или иное частное решение. Например, положив $c = 1$ или $c = 2$, получим

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} -2.2c \\ -0.6c \\ c \end{pmatrix} \overset{c=1}{\to} X_1 = \begin{pmatrix} -2.2 \\ -0.6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} -2.2c \\ -0.6c \\ c \end{pmatrix} \overset{c=2}{\to} X_2 = \begin{pmatrix} -4.4 \\ -1.2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Оба вектор-столбца X_1 и X_2 являются решениями исходной системы уравнений, в чем легко убедиться, подставив их элементы вместо неизвестных x_1, x_2 и x_3 в каждом уравнении системы и получив верные тождества.

Теорема (свойство решений однородной системы)

Если вектор-столбцы $X_1, X_2, ..., X_s$ - решения однородной системы, то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.

Определение

Фундаментальной системой решений однородной системы называется любой набор $k = n - r$ линейно независимых решений этой системы, где n - количество неизвестных в системе, а r - ранг ее матрицы A

Обозначим: X_{OO} – общее решение однородной системы.

Теорема (о структуре общего решения однородной системы)

Если $F_1, F_2, ..., F_k$ - произвольная фундаментальная система решений однородной системы, то ее общее решение можно представить в виде

$$X_{OO} = c_1 F_1 + c_2 F_2 + ... + c_k F_k,$$

где c_1, c_2, ..., c_k - произвольные постоянные.

Пример: Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение:

1. Используя метод Гаусса, находим общее решение системы:

$$X_{OO} = \begin{pmatrix} (-14c_1 - 19c_2 + 6c_3)/11 \\ (5c_1 + 6c_2 + c_3)/11 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

2. Определяем количество решений, входящих в фундаментальную систему решений. Поскольку количество неизвестных $n = 5$, а ранг матрицы системы $r = 2$, то фундаментальная система решений содержит $k = n - r = 5 - 2 = 3$ решения.

3. Находим $k = 3$ линейно независимые частные решения и формируем из них фундаментальную систему решений. Для этого в общем решении X_{OO} придадим произвольным постоянным c_1, c_2 и c_3 следующие значения:

(1) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$,
(2) $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$,
(3) $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$.

Такой выбор значений произвольных постоянных гарантирует линейную независимость получающихся частных решений. Произвольным постоянным c_1, c_2 и c_3 можно придать любые другие значения, при которых получающиеся частные решения будут линейно независимыми, но представленный набор значений c_1, c_2 и c_3 является стандартным выбором, если в условии задачи не выдвигается каких-либо ограничений на возможные значения c_1, c_2 и c_3.

В итоге получаем фундаментальную систему решений:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -14/11 \\ 5/11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} -19/11 \\ 6/11 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 1/11 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

с помощью которой можно задать общее решение исходной системы в виде:

$$X_{OO} = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3,$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.

2 Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений

Теорема (о структуре общего решения неоднородной системы)

Пусть вектор-столбец $X_{\text{Част}}$ – частное решение неоднородной системы $AX = B$ и известна фундаментальная система решений F_1, F_2, ..., F_k соответствующей однородной системы $AX = O$. Тогда общее решение неоднородной системы можно представить в виде

$$X_{\text{Общ}} = X_{\text{Част}} + c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_kF_k,$$

где c_1, ..., c_k – произвольные постоянные, или в виде

$$X_{\text{Общ}} = X_{\text{Част}} + X_{OO},$$

где X_{OO} – общее решение соответствующей однородной системы.

Пример: Найти общее решение неоднородной линейной системы
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$$
с помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Решение:

Поскольку система неоднородная, то будем приводить к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim}$$
$$\overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Сделаны следующие элементарные преобразования:
(1) ко второй строке добавили первую строку,
(2) из третьей строки вычли вторую строку,
(3) из второй строки вычли первую строку, умноженную на 3.

Получили $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$. Значит, система совместна. Т.к. число неизвестных $n = 5$ и $r(A) < n$, то система является неопределенной.

Составим по ступенчатой матрице соответствующую однородную систему:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -3x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$
и найдем ее общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = (-4c_1 + 3c_2 - 6c_3)/3, \\ x_2 = (c_1 - 6c_2 + 3c_3)/3, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$$

Из общего решения выделяем фундаментальную систему решений:

$$F_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ F_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы. Для этого составим по ступенчатой матрице соответствующую неоднородную систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ -3x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}$$

Положим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, тогда $x_1 = 5/3$, $x_2 = 1/3$ и

$$X_{\text{Част}} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной неоднородной системы имеет вид:

$$X_{\text{Общ}} = X_{\text{Част}} + c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные.