Аналитическая геометрия
Модуль 1
Матричная алгебра. Векторная алгебра
Текст 1.2
(для ГУИМЦ, 2024)

Аннотация

Линейная зависимость строк и столбцов матрицы. Базисный минор, теорема о базисном миноре. Ранг матрицы, теорема о ранге матрицы, свойства ранга матрицы. Способы вычисления ранга матрицы: метод окаймляющих миноров, метод элементарных преобразований.

1 Линейная зависимость строк и столбцов матрицы

Любую строку произвольной матрицы A можно рассматривать как матрицу из одной строки, а любой столбец - как матрицу из одного столбца. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

состоит из двух строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix},$$

рассматриваемых как отдельные однострочные матрицы. Следовательно, к ним применимы обычные правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{+}3 & 2{+}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix},$$
$$2 \cdot P_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{\cdot}1 & 2{\cdot}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - действительные числа, $P_1, P_2, ..., P_n$ - строки матрицы A. Выражение

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_n P_n$$

называется **линейной комбинацией строк** $P_1, P_2, ..., P_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Определение

Линейная комбинация строк матрицы называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Определение

Строки $P_1, P_2, ..., P_n$ матрицы A называются **линейно зависимыми**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих строк, равная нулевой строке.

Определение

Строки $P_1, P_2, ..., P_n$ матрицы A называются **линейно независимыми**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке.

Примеры:

1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

состоит из двух строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Эти строки линейно зависимы, т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$2 \cdot P_1 - P_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2{\cdot}1{-}2 & 2{\cdot}2{-}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

состоит из трех строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2{\cdot}0{-}0 & 2{\cdot}1{-}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а строки P_1 и P_2 линейно независимы, т.к. только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке:

$$0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0{\cdot}1{+}0{\cdot}0 & 0{\cdot}0{+}0{\cdot}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В то же время все три строки P_1, P_2 и P_3 будут линейно зависимы, т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$0 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 - P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теоремы (о линейной зависимости строк матрицы)

1. Если среди строк матрицы есть нулевая, то эти строки линейно зависимы.

2. Если строки матрицы линейно зависимы, то одна из них есть линейная комбинация остальных.

Замечание

Рассмотренное выше определение линейной зависимости и связанные с ним понятия также справедливы и для столбцов матрицы. Например, столбцы $P_1, P_2, ..., P_n$ матрицы A называются **линейно зависимыми**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих столбцов, равная нулевому столбцу.

2 Ранг матрицы

Определение

Минором порядка k матрицы A называют определитель, который составлен из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов с сохранением их порядков.

Обозначение: M_k.

Пример: Рассмотрим матрицу

$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Каждый минор 1-го порядка состоит из элемента, стоящего на пересечении какой-либо строки и какого-либо столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_1 = 7.$$

Каждый минор 2-го порядка состоит из элементов, стоящих на пересечении каких-либо двух строк и каких-либо двух столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Каждый минор 3-го порядка состоит из элементов, стоящих на пересечении каких-либо трех строк и каких-либо трех столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Определение

Минор k-ого порядка матрицы A называют **базисным**, если он отличен от нуля, а все миноры большего порядка равны нулю или не существуют.

Обозначение: $M_k^{(б)}$.

Замечание

Матрица может иметь несколько базисных миноров одного порядка.

Определение

Строки и столбцы матрицы, в которых расположен выбранный базисный минор, называют **базисными**.

Теорема (о базисном миноре)

Базисные строки (столбцы) матрицы, соответствующие ее выбранному базисному минору, линейно независимы. Любые строки (столбцы) матрицы, не входящие в выбранный базисный минор, являются линейными комбинациями данных базисных строк (столбцов).

Следствие из теоремы о базисном миноре

Для того чтобы квадратная матрица была невырожденной необходимо и достаточно, чтобы ее строки (столбцы) были линейно независимы.

Определение

Рангом матрицы A называется порядок ее базисного минора.

Обозначение: r, $r(A)$, $rangA$.

Свойства ранга матрицы:

1. $r(A+B) \le r(A) + r(B)$.
2. $r(A \cdot B) \le \min\{r(A), r(B)\}$.
3. $r(A^T) = r(A)$.

Теорема (о ранге матрицы)

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов), через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).

Следствие из теоремы о ранге матрицы

Для любой матрицы максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов.

3 Способы вычисления ранга матрицы

Ранг матрицы вычисляется с помощью двух методов:
1) метод окаймляющих миноров;
2) метод элементарных преобразований.

3.1 Метод окаймляющих миноров

Определение

Минор M^* матрицы A называется **окаймляющим для минора** M, если он получается из последнего добавлением одной новой строки и одного нового столбца матрицы А.

Теорема (об окаймляющих минорах)

Если для некоторого отличного от нуля минора матрицы все окаймляющие его миноры равны нулю, то он является базисным.

Метод окаймляющих миноров позволяет найти один из базисных миноров и включает в себя следующие этапы:

1. Выбирается ненулевой минор первого порядка (любой ненулевой элемент матрицы).

2. К этому минору последовательно добавляются такие строки и столбцы, чтобы новый окаймляющий минор был отличен от нуля. Если этого сделать нельзя, то последний ненулевой минор является базисным, а его порядок равен рангу матрицы.

Пример: Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Выберем ненулевой минор первого порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_1 = 1 \neq 0.$$

Формируем для него окаймляющий минор второго порядка, отличный от нуля:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Вычислим все миноры третьего порядка, окаймляющие выбранный минор M_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все миноры, окаймляющие минор M_2, равны нулю. Значит, $r(A) = 2$.

3.2 Метод элементарных преобразований

Определение

Ступенчатой называется матрица, у которой все ненулевые строки располагаются над всеми нулевыми строками и первый ненулевой элемент каждой ненулевой строки располагается правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

Замечание

Нулевой строкой является строка, в которой все элементы равны нулю. Если хотя бы один элемент строки отличен от нуля, то эта строка будет ненулевой.

Пример: Ступенчатой является матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь первая, вторая и третья строки являются ненулевыми, а четвертая – нулевой. В каждой ненулевой строке красным цветом указан ее первый ненулевой элемент. Видно, что первый ненулевой элемент третьей строки a_{34} расположен правее первого ненулевого элемента второй строки a_{22}, который, в свою очередь, расположен правее первого ненулевого элемента первой строки a_{11}.

Замечание

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований *строк* можно привести к ступенчатому виду.

Теорема (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях)

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

Теорема (о ранге ступенчатой матрицы)

Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований состоит в следующем:

1. С помощью элементарных преобразований *строк* приводим данную матрицу к ступенчатому виду.

2. Определяем ранг исходной матрицы как количество ненулевых строк в получившейся ступенчатой матрице.

Пример: Найти ранг матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований *строк* к ступенчатому виду и найдем число ненулевых строк полученной матрицы:
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim}$$
$$\overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\sim}$$
$$\overset{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проведены следующие элементарные преобразования:

(1) переставили местами первую и третью строки;

(2) прибавили к четвертой строке третью;

(3) вычли из третьей строки первую, умноженную на 2, а четвертую строку поделили на 3;

(4) переставили местами вторую и четвертую строки, а третью строку поделили на 5;

(5) из четвертой строки вычли вторую строку, умноженную на 3;

(6) к четвертой строке прибавили третью строку.

Видно, что матрица, полученная из матрицы A указанными элементарными преобразованиями, имеет ступенчатую форму с тремя ненулевыми строками. Следовательно, $r(A) = 3$.

Замечания

1. При нахождении ранга матрицы методом окаймляющих миноров может потребоваться не только большое количество вычислений, но и в некоторых случаях вычисление определителей высоких порядков. Однако, в результате будет найден не только ранг матрицы, но и один из ее базисных миноров.

2. Количество вычислений при нахождении ранга матрицы методом элементарных преобразований гораздо меньше. Но этот метод позволяет найти базисный минор только для матрицы ступенчатого вида, полученной в результате элементарных преобразований. Для нахождения базисного минора исходной матрицы необходимы трудоемкие дополнительные вычисления с учетом уже известного ранга матрицы.