Аналитическая геометрия
Модуль 1
Матричная алгебра. Векторная алгебра
Текст 1.1
(для ГУИМЦ, 2024)

Аннотация

Понятие определителя. Вычисление определителей 1-ого, 2-ого и 3-его порядков. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения элементов квадратной матрицы. Вычисление определителя произвольного порядка путем его разложения по элементам строки или столбца (теорема разложения). Теорема аннулирования.

1 Определитель матрицы

Определитель является характеристикой исключительно квадратных матриц.

Определение

Определителем квадратной матрицы называется число, которое ставится в соответствие данной матрице и вычисляется по заданному правилу из ее элементов.

Если $A = (a_{ij})$ - это квадратная матрица порядка n, то ее определитель называется **определителем n-го порядка** и записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Употребляются также следующие обозначения:

$$\det A,\ \Delta A,\ |A|.$$

Приведем **правила вычисления определителей** первого, второго и третьего порядков:

1. Определитель первого порядка.

Пусть $A = (a_{11})$ – матрица первого порядка, состоящяя только из одного элемента a_{11}. Тогда ее определитель полагается равным этому элементу:

$$\det A = a_{11}.$$

Пример:

$A = (3), \det A = 3.$

2. Определитель второго порядка.

Для матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

определитель вычисляется как произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1.$

3. Определитель третьего порядка.

Для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

определитель вычисляется по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Эта формула может быть получена по **правилу треугольников**, основанному на геометрической интерпретации ее членов:

1. Элементы, произведения которых входят в формулу со знаком «+», образуют главную диагональ и два треугольника, симметричные относительно нее:

$$+\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Элементы, произведения которых входят в формулу со знаком «-», располагаются аналогично относительно побочной диагонали:

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - \\ -6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 5 \cdot 0 \cdot (-4) = 9.$$

2 Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо **ряда** (*строки* или *столбца*) прибавить/вычесть соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\alpha\cdot a_{21} & a_{12}+\alpha\cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}-\beta\cdot a_{11} & a_{22}-\beta\cdot a_{12} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке местами двух параллельных рядов знак определителя меняется на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Если каждый элемент некоторого ряда определителя раскладывается на сумму каких-либо двух слагаемых (для каждого элемента своих), то определитель может быть разложен на сумму двух определителей, у которых в этом ряду в качестве соответствующего элемента стоит только одно из слагаемых, а остальные ряды переходят из исходного определителя без изменений:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Определитель не меняется при транспонировании:

$$\det A = \det A^T.$$

6. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

7. Определитель равен нулю, если он имеет:

- нулевую строку (столбец);
- хотя бы две одинаковые строки (столбца);
- хотя бы две строки (столбца), элементы которых пропорциональны;
- хотя бы одну строку (столбец), являющуюся линейной комбинацией других строк (столбцов).

3 Миноры и алгебраические дополнения

Определение

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель матрицы, получающейся из данной путем вычеркивания i-ой строки и j-ого столбца.

Пример:

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, то

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 1 \cdot 7 = -7$ – минор элемента a_{11}, получившийся путем вычеркивания из матрицы A первой строки и первого столбца,

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 0 \cdot (-2) = 7$ – минор элемента a_{32}, получившийся путем вычеркивания из матрицы A третьей строки и второго столбца.

Определение

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число, равное $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример:

Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, то

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1.$

4 Вычисление определителя произвольного порядка

Теорема (теорема разложения определителя по элементам какого-либо ряда)

Определитель квадратной матрицы произвольного порядка равен сумме произведений элементов какого-либо ряда данной матрицы на их алгебраические дополнения.

Пример: Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель с помощью разложения по элементам второй строки, содержащей один нулевой элемент ($a_{22} = 0$), поскольку при этом нет необходимости находить алгебраическое дополнение A_{22}, так как $a_{22} \cdot A_{22} = 0$ при любом значении A_{22}. Итак,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + (-4) \cdot A_{23} = \\ = 1 \cdot A_{21} + 0 + (-4) \cdot A_{23},$$

где

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8.$$

Тогда

$$\Delta = 1 \cdot 2 + 0 + (-4) \cdot (-8) = 34.$$

Замечание

Эта теорема позволяет свести вычисление определителя n-го порядка к определителю порядка $(n-1)$. В целом громоздкая процедура, однако ее можно заметно упростить, если воспользоваться свойствами определителя, например, свойством 1, которое позволяет обнулить значительную часть элементов какого-либо ряда. В этом случае исчезаеть необходимость считать существенную часть алгебраических дополнений, соответствующих нулевым элементам.

Пример: Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 1. Его особенно удобно применять, если в определителе существует элемент, равный ± 1. Выберем в качестве такого элемента $a_{13} = 1$ и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нули. С этой целью:

а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;

б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;

в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки.

Отметим, что согласно свойствам определителя преобразования (а)-(в) не изменяют значение определителя.

Тогда получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу. В этом случае нам достаточно посчитать только одно алгебраическое дополнение A_{13}, поскольку все остальные элементы 3-его столбца равны нулю, а произведение любого числа на нуль есть нуль.

$$\Delta = 1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} = 1 \cdot A_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 1-й строки нового определителя удвоенные элементы 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим получившийся определитель по 1-й строке:

$$\Delta = (-3) \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = (-3) \cdot A_{11} =$$

$$= (-3) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.$$

Замечание

Определитель треугольной матрицы любого порядка равен произведению элементов главной диагонали.

Пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-3) \cdot 2 = -72.$$

В дальнейшем нам понадобится еще одна теорема.

Теорема (теорема аннулирования)

Сумма произведений элементов какого-либо ряда квадратной матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов любого параллельного ряда этой же матрицы равна нулю.

Пример: Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем сумму произведений элементов первой строки матрицы на алгебраические дополнения элементов второй строки:

$$(-3) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 5 \cdot A_{23} =$$

$$= (-3) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)\cdot(-1)\cdot(-15) + 1\cdot 1\cdot(-5) + 5\cdot(-1)\cdot(-10) = -45 - 5 + 50 = 0.$$

