Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

## Примеры решения типовых заданий рубежного контроля

### Методические указания

1. Каждый преподаватель предъявляет свои собственные требования к оформлению решения. Поэтому при подготовке модульного индивидуального домашнего задания необходимо, опираясь на приведенные здесь примеры, оформлять свое решение в соответствии с требованиями преподавателя, выдавшего это задание.

2. Для каждой задачи приводится ссылка на используемый теоретический материал (лекции и тексты). Решение задачи излагается в предположении, что этот материал уже знаком обучающемуся. Поэтому перед разбором решения необходимо подробно с ним ознакомиться.

**Задача 1.** Даны вершины треугольника: $A(5;\ -2)$, $B(0;\ 1)$, $C(3;\ 3)$. Составить общие уравнения сторон треугольника и высоты $BN$. Вычислить площадь треугольника и длину высоты $AH$. Сделать чертеж.

***Решение.*** Используем материал текста 2.1.

1. Для составления общих уравнений сторон треугольника $ABC$ воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_1;\ y_1)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставив в это уравнение координаты вершин треугольника, получим:

$$AB:\ \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\Leftrightarrow\frac{x-5}{0-5}=\frac{y-(-2)}{1-(-2)}\Leftrightarrow\frac{x-5}{-5}=\frac{y+2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-5)=-5(y+2)\Leftrightarrow 3x+5y-5=0,$$

$$AC: \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A} \Leftrightarrow \frac{x-5}{3-5}=\frac{y-(-2)}{3-(-2)} \Leftrightarrow \frac{x-5}{-2}=\frac{y+2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(x-5)=-2(y+2) \Leftrightarrow 5x+2y-21=0,$$

$$BC: \frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B} \Leftrightarrow \frac{x-0}{3-0}=\frac{y-1}{3-1} \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{y-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=3(y-1) \Leftrightarrow 2x-3y+3=0.$$

2. Для нахождения уравнения высоты $BN$ воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\, y_1)$ и имеющей заданный нормальный вектор $\vec{n}=(A;\, B)$:

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)=0.$$

Поскольку высота $BN$ перпендикулярна стороне $AC$, то в качестве нормального вектора $\vec{n}$ прямой $BN$ примем вектор

$$\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A;\, y_C-y_A)=(3-5;\, 3-(-2))=(-2;\, 5),$$

а в качестве данной точки $M_0$ возьмем точку $B$, из которой выходит высота $BN$ .

Тогда

$$BN: -2\cdot(x-0)+5\cdot(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+5y-5=0 \Leftrightarrow 2x-5y+5=0.$$

3. Вычислим длину высоты $AH$ как расстояние от точки $A(\underbrace{5}_{x_A};\, \underbrace{-2}_{y_A})$ до прямой

$BC: \underbrace{2}_{A}x\underbrace{-3}_{B}y+\underbrace{3}_{C}=0$:

$$d=|AH|=\frac{|A\cdot x_A+B\cdot y_A+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\cdot 5+(-3)\cdot(-2)+3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{19}{\sqrt{13}}.$$

4. Площадь треугольника $ABC$ можно вычислить по формуле:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AH|,$$

где

$$|BC|=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{19}{\sqrt{13}} = \frac{19}{2}.$$

5. Сделаем чертеж (рис. 1).

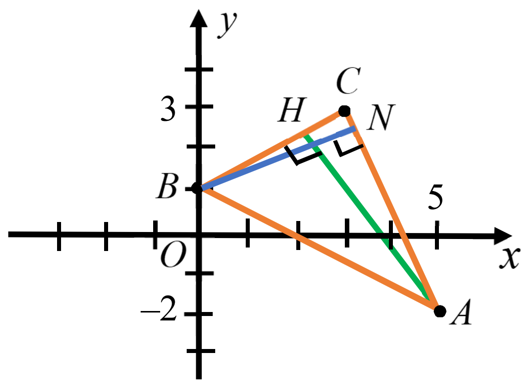


*Рис. 1.* Чертеж к задаче 1.

**Ответ:** $AB$: $3x+5y-5=0$, $AC$: $5x+2y-21=0$, $BC$: $2x-3y+3=0$,

$BN$: $2x-5y+5=0$, $|AH| = \dfrac{19}{\sqrt{13}}$, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{19}{2}$.

**Задача 2.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $D(-1;\ 1;\ 2)$ параллельно прямым $l_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{-2}$ и $l_2: \dfrac{x+3}{0} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z}{2}$.

***Решение.*** Используем материалы лекции 2.1 и текста 2.2.

Из канонических уравнений прямых $l_1$ и $l_2$ видно, что они имеют направляющие векторы $\vec{s}_1 = (1;\ 3;\ -2)$ и $\vec{s}_2 = (0;\ -3;\ 2)$.

Нормальный вектор $\vec{n}$ искомой плоскости перпендикулярен каждому из векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$, т.к. прямые $l_1$ и $l_2$ параллельны плоскости. Поэтому в качестве вектора $\vec{n}$ можно взять векторное произведение векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$. Вычислим его координаты:

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} = (0;\ -2;\ -3).$$

Теперь воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и имеющей заданный нормальный вектор $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$:

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0.$$

В нашем случае плоскость проходит через точку $D(\underbrace{-1}_{x_0};\ \underbrace{1}_{y_0};\ \underbrace{2}_{z_0})$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}=(\underbrace{0}_{A};\ \underbrace{-2}_{B};\ \underbrace{-3}_{C})$ Тогда

$$0\cdot(x-(-1))+(-2)\cdot(y-1)+(-3)\cdot(z-2)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-8=0$$

– искомое уравнение плоскости.

**Ответ:** $2y+3z-8=0$.

**Задача 3.** Составить уравнение прямой $l_1$, проходящей через точку $M(2;\ 0;\ -3)$ и точку пересечения прямой $l_2: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{-2}$ с плоскостью $\alpha$: $2x+4y-3z+32=0$.

***Решение.*** Используем материалы лекции 2.1 и текста 2.2. Чертеж к заданию приведен на рис. 2.

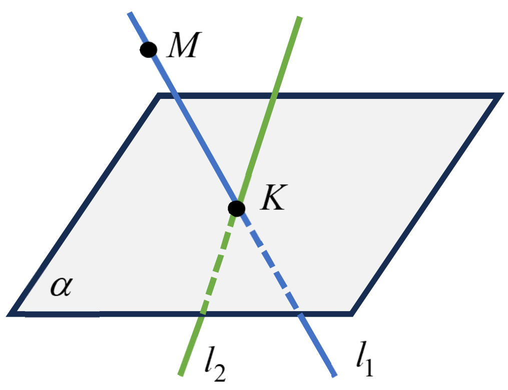


*Рис. 2.* Чертеж к задаче 3.

1. Найдем точку $K$ пересечения прямой $l_2$ с плоскостью $\alpha$. Для этого перейдем от канонических уравнений прямой к параметрическим:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-2}=t\Rightarrow\begin{cases}x=t+2,\\ y=3t+1,\\ z=-2t.\end{cases}$$

Подставим параметрические уравнения прямой в общее уравнение плоскости и найдем значение $t$, при котором прямая и плоскость будут пересекаться:

$$2\cdot(t+2)+4\cdot(3t+1)-3\cdot(-2t)+32=0\Rightarrow t=-2.$$

Подставим это значение параметра в параметрические уравнения прямой. Тогда координаты точки будут

$$\begin{cases}x=-2+2=0,\\ y=3\cdot(-2)+1=-5,\\ z=-2\cdot(-2)=4,\end{cases}$$

т.е. $K(0;\ -5;\ 4)$.

2. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

подставив в него соответствующие координаты точек $K$ и $M$. Тогда

$$KM:\ \frac{x-x_K}{x_M-x_K}=\frac{y-y_K}{y_M-y_K}=\frac{z-z_K}{z_M-z_K}\Leftrightarrow\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-(-5)}{0-(-5)}=\frac{z-4}{-3-4}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{y+5}{5}=\frac{z-4}{-7}$$

**Ответ:** $l_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+5}{5}=\dfrac{z-4}{-7}$.

**Задача 4.** Найти уравнение гиперболы и построить ее, зная, что её эксцентриситет $\varepsilon=2$, а фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$.

***Решение.*** Используем материал лекции 2.2.

1. Сравнивая данное по условию задачи уравнение эллипса с его каноническим уравнением в общем виде

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,$$

находим, что $a_1=\sqrt{5}$, $b_1=1$. Поскольку $a_1>b_1$, то большая полуось эллипса лежит на оси $Ox$, а значит и фокусы эллипса также лежат на оси $Ox$. Определяем координаты этих фокусов по формуле $c_1^2=a_1^2-b_1^2$, тогда $c_1^2=5-1=4$, $c_1=2$. Следовательно, фокусы эллипса есть $F_1(-c_1;\ 0)$, $F_2(c_1;\ 0)$ или $F_1(-2;\ 0)$, $F_2(2;\ 0)$. По условию задачи они же являются и фокусами гиперболы. Следовательно, действительная ось гиперболы также лежит на оси $Ox$.

Каноническое уравнение гиперболы, у которой действительная ось лежит на оси $Ox$, имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

её эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, где $c^2=a^2+b^2$, а фокусы – $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$.

Поскольку фокусы эллипса $F_1(-2;\ 0)$, $F_2(2;\ 0)$ совпадают с фокусами гиперболы, то $c=2$. Из условия задачи $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=2$ получаем $a=\dfrac{c}{\varepsilon}=\dfrac{2}{2}=1$ – действительная полуось гиперболы. Найдем мнимую полуось:

$$b^2=c^2-a^2=4-1=3\Rightarrow b=\sqrt{3}.$$

Зная величины $a$ и $b$, мы можем выписать каноническое уравнение гиперболы:

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1.$$

2. Для построения гиперболы на координатной плоскости построим прямоугольник со сторонами $2a=2$ и $2b=2\sqrt{3}$. Затем проведем прямые – асимптоты гиперболы – через диагонали этого прямоугольника.

Далее отметим вершины гиперболы. Они расположены на оси абсцисс в точках $A_1(-a;\ 0)$ и $A_2(a;\ 0)$. Вершины нашей гиперболы находятся в точках $A_1(-1;\ 0)$, $A_2(1;\ 0)$.

Для точного построения гиперболы можно найти координаты двух-трех точек, принадлежащих любой из двух ветвей гиперболы. Точки на второй ветви будут им симметричны относительно осей координат.

Пусть $x=2$, тогда $2^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \Leftrightarrow y^2=9$ и $y=\pm 3$. Пусть $x=3$, тогда $3^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \Leftrightarrow y^2=24$ и $y=\pm\sqrt{24}\approx\pm 4.9$. На чертеже отметим эти точки и точки им симметричные.

Построим гиперболу (рис. 3).

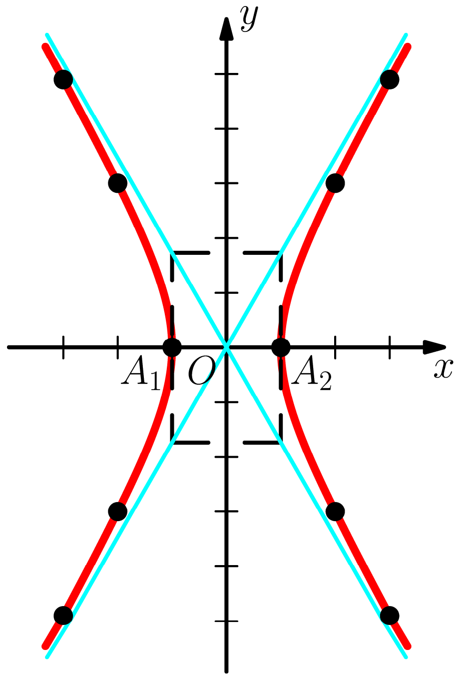


*Рис*. 3. Чертеж к задаче 4.