Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Модуль 2. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

Пример решения модульного индивидуального домашнего задания

Методические указания

1. Каждый преподаватель предъявляет свои собственные требования к оформлению решения. Поэтому при подготовке модульного индивидуального домашнего задания необходимо, опираясь на приведенные здесь примеры, оформлять свое решение в соответствии с требованиями преподавателя, выдавшего это задание.

2. Для каждой задачи приводится ссылка на используемый теоретический материал (лекции и тексты). Решение задачи излагается в предположении, что этот материал уже знаком обучающемуся. Поэтому перед разбором решения необходимо подробно с ним ознакомиться.

ЧАСТЬ 1. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ И ПЛОСКОСТЬ

Задача 1. На плоскости дан треугольник ABC с известными координатами его вершин: $A(1;\ -1)$, $B(2;\ 3)$, $C(4;\ 0)$.

Требуется:

а) написать общие уравнения прямых, содержащих стороны AB и AC, высоту CH, медиану BD и биссектрису AE треугольника ABC;

б) найти длину медианы BD и высоты CH;

в) написать общее уравнение серединного перпендикуляра к стороне AC;

г) найти внутренний угол BAC и площадь треугольника ABC.

Решение. Используем материал текста 2.1. Схематический чертеж задачи приведен на рис. 1.

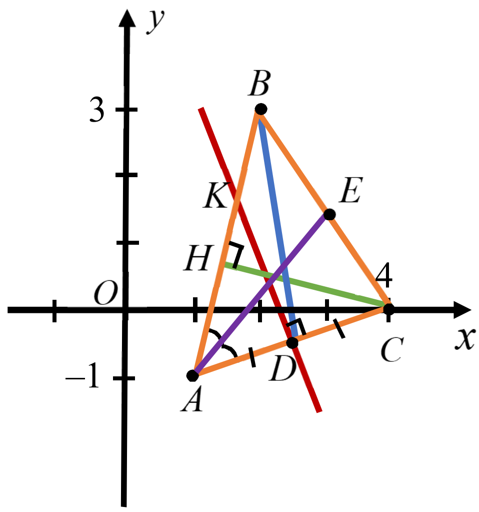

Рис. 1. Чертеж к задаче 1.

(а):

1. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставив в это уравнение координаты точек A и B, получим:

$$AB:\ \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\Leftrightarrow\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-(-1)}{3-(-1)}\Leftrightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)=y+1\Leftrightarrow 4x-y-5=0.$$

Тогда общее уравнение прямой AB есть $4x-y-5=0$.

Аналогично найдем общее уравнение прямой AC:

$$AC:\ \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}\Leftrightarrow\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-(-1)}{0-(-1)}\Leftrightarrow\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=3(y+1)\Leftrightarrow x-3y-4=0.$$

Соответственно, общее уравнение прямой AC есть $x-3y-4=0$.

2. Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Найдем координаты точки D – середины стороны AC. Тогда:

$$x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+4}{2} = 2,5;\ y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1+0}{2} = -0,5.$$

Отсюда получаем точку $D(2,5;\ -0,5)$ и находим:

$$BD:\ \frac{x - x_B}{x_D - x_B} = \frac{y - y_B}{y_D - y_B} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2,5-2} = \frac{y-3}{-0,5-3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{0,5} = \frac{y-3}{-3,5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3,5(x-2) = 0,5(y-3) \Leftrightarrow 7x + y - 17 = 0.$$

Тогда общее уравнение прямой, содержащей медиану BD есть $7x + y - 17 = 0$.

3. Высота треугольника – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону (точнее, на прямую, содержащую противоположную сторону).

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и имеющей заданный нормальный вектор $\vec{n} = (A;\ B)$:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0.$$

Прямая, содержащая высоту CH, проходит через точку $C(4;\ 0)$ перпендикулярно прямой AB, поэтому вектор $\overrightarrow{AB} = (2-1;\ 3-(-1)) = (1;\ 4)$ – нормальный вектор прямой CH. Отсюда получаем:

$$1 \cdot (x-4) + 4 \cdot (y-0) = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0.$$

То есть $x + 4y - 4 = 0$ – общее уравнение прямой, содержащей высоту CH.

4. Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

Биссектриса любого угла обладает следующим свойством: точки биссектрисы угла равноудалены от сторон этого угла. Воспользуемся им.

Каждая точка $M(x;y)$ биссектрисы AE равноудалена от сторон $\angle BAC$, а это значит и от прямых AB и AC. Пусть d_1 – расстояние от точки M до прямой AB, d_2 – расстояние от точки M до прямой AC. Тогда по формуле расстояния от точки до прямой на плоскости получаем:

$$d_1=\frac{|4x-y-5|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|4x-y-5|}{\sqrt{17}},\ d_2=\frac{|x-3y-4|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|x-3y-4|}{\sqrt{10}}.$$

Так как $d_1=d_2$, согласно свойству биссектрисы, то

$$\frac{|4x-y-5|}{\sqrt{17}}=\frac{|x-3y-4|}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow\frac{4x-y-5}{\sqrt{17}}=\pm\frac{x-3y-4}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда уравнения двух взаимно перпендикулярных биссектрис внутреннего и внешнего углов ΔABC имеют вид:

$$\left[\begin{array}{l}(4\sqrt{10}-\sqrt{17})x-(\sqrt{10}-3\sqrt{17})y-5\sqrt{10}+4\sqrt{17}=0,\\(4\sqrt{10}+\sqrt{17})x-(\sqrt{10}+3\sqrt{17})y-5\sqrt{10}-4\sqrt{17}=0.\end{array}\right.$$

Для выбора нужной биссектрисы внутреннего угла BAC подставим поочередно координаты точек B и C в левые части получившихся уравнений. Мы получим числа одинакового знака для биссектрисы внешнего угла, т.к. в этом случае точки B и C лежат по одну сторону от биссектрисы. От биссектрисы внутреннего угла точки B и C лежат по разные стороны, поэтому подстановка их координат в уравнение биссектрисы внутреннего угла даст нам числа разных знаков.

Подставим в первое уравнение координаты точек B и C:

$$B:\ (4\sqrt{10}-\sqrt{17})\cdot2-(\sqrt{10}-3\sqrt{17})\cdot3-5\sqrt{10}+4\sqrt{17}=11\sqrt{17}>0,$$

$$C:\ (4\sqrt{10}-\sqrt{17})\cdot4-(\sqrt{10}-3\sqrt{17})\cdot0-5\sqrt{10}+4\sqrt{17}=11\sqrt{10}>0.$$

Следовательно, точки B и C расположены по одну сторону от биссектрисы. Значит, первое уравнение есть уравнение биссектрисы внешнего угла, а второе $(4\sqrt{10}+\sqrt{17})x-(\sqrt{10}+3\sqrt{17})y-5\sqrt{10}-4\sqrt{17}=0$ является уравнением биссектрисы AE внутреннего угла BAC треугольника ABC.

(б):

1. Для нахождения длины медианы BD воспользуемся формулой расстояния между двумя точками:

$$|BD|=\sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2}=\sqrt{(2{,}5-2)^2+(-0{,}5-3)^2}=\sqrt{\frac{25}{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}.$$

2. Длина высоты CH, опущенной из вершины C на сторону AB, есть расстояние от точки C до прямой AB. Ранее было найдено общее уравнение прямой AB:

$$\underbrace{4}_{A}\cdot x\underbrace{-1}_{B}\cdot y\underbrace{-5}_{C}=0$$

Поэтому длину высоты CH можно найти по стандартной формуле расстояния от точки до прямой на плоскости:

$$|CH|=\frac{|A\cdot x_C+B\cdot y_C+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|4\cdot 4+(-1)\cdot 0+(-5)|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{11}{\sqrt{17}}.$$

(в): Серединный перпендикуляр треугольника – это прямая, которая проходит через середину стороны треугольника перпендикулярно этой стороне.

Серединный перпендикуляр к стороне AC проходит через ее середину – точку D – перпендикулярно ей.

Для нахождения уравнения прямой KD – серединного перпендикуляра к стороне AC – воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный нормальный вектор. Данной точкой является точка $D(2,5;\ -0,5)$, а в качестве нормального вектора можно взять вектор $\overrightarrow{AC}=\left(x_C-x_A;\ y_C-y_A\right)=(4-1;\ 0-(-1))=(3;\ 1)$, поскольку $AC\perp KD$. Тогда

$$3\cdot(x-2,5)+1\cdot(y-(-0,5))=0\Leftrightarrow 3x+y-7=0$$

– общее уравнение прямой KD.

(г):

1. Для вычисления внутреннего угла треугольника воспользуемся скалярным произведением векторов, лежащих на сторонах угла. Внутренний угол BAC образован векторами $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;\ y_B-y_A\right)=(2-1;\ 3-(-1))=(1;\ 4)$ и $\overrightarrow{AC}=(3;\ 1)$. Найдем косинус угла между этими векторами:

$$\cos\angle BAC=\cos\left(\overrightarrow{AB},\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1\cdot 3+4\cdot 1}{\sqrt{1^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{170}}.$$

Тогда $\angle BAC=\arccos\left(\dfrac{7}{\sqrt{170}}\right)$.

2. Площадь треугольника ABC может быть найдена по формуле

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|AB|\cdot|CH|.$$

Из формулы расстояния между двумя точками следует, что

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{17}.$$

Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|CH| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{11}{\sqrt{17}} = 5{,}5.$

Ответ: а) $AB: 4x - y - 5 = 0$, $AC: x - 3y - 4 = 0$, $BD: 7x + y - 17 = 0$, $CH: x + 4y - 4 = 0$, $AE: (4\sqrt{10} + \sqrt{17})x - (\sqrt{10} + 3\sqrt{17})y - 5\sqrt{10} - 4\sqrt{17} = 0$; б) $|BD| = 5/\sqrt{2}$, $|CH| = 11/\sqrt{17}$; в) $KD: 3x + y - 7 = 0$; г) $\angle BAC = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{170}}\right)$, $S_{\Delta ABC} = 5{,}5.$

Задача 2. Задана пирамида $SABC$ координатами вершин: $S(3;\ -4;\ 0)$, $A(1;\ 4;\ 0)$, $B(-2;\ 3;\ 1)$, $C(-5;\ 2;\ -1)$.

Требуется:

а) составить уравнения сторон ΔABC;

б) составить уравнения плоскостей основания (ABC) и боковой грани (SBC);

в) найти косинус острого угла между плоскостями (ABC) и (SBC);

г) найти длину высоты SH.

Решение. Используем материал лекции 2.1 и текста 2.2. Схематический чертеж пирамиды приведен на рис. 2.

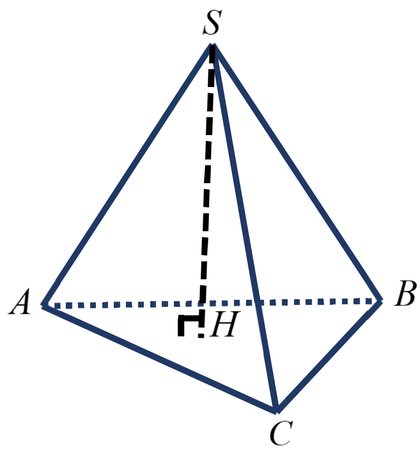

Рис. 2. Чертеж к задаче 2.

а) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Тогда искомые уравнения сторон ΔABC:

$$AB:\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}\Leftrightarrow\frac{x-1}{-2-1}=\frac{y-4}{3-4}=\frac{z-0}{1-0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{-3}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z}{1};$$

$$AC:\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}=\frac{z-z_A}{z_C-z_A}\Leftrightarrow\frac{x-1}{-5-1}=\frac{y-4}{2-4}=\frac{z-0}{-1-0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{-6}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z}{-1}\Leftrightarrow\frac{x-1}{6}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{1};$$

$$BC:\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B}=\frac{z-z_B}{z_C-z_B}\Leftrightarrow\frac{x-(-2)}{-5-(-2)}=\frac{y-3}{2-3}=\frac{z-1}{-1-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+2}{-3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-2}\Leftrightarrow\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

б) Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Имеем: $A(\underbrace{1}_{x_1};\ \underbrace{4}_{y_1};\ \underbrace{0}_{z_1})$, $B(\underbrace{-2}_{x_2};\ \underbrace{3}_{y_2};\ \underbrace{1}_{z_2})$, $C(\underbrace{-5}_{x_3};\ \underbrace{2}_{y_3};\ \underbrace{-1}_{z_3})$. Тогда

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-0 \\ -2-1 & 3-4 & 1-0 \\ -5-1 & 2-4 & -1-0 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z \\ -3 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Раскроем определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z \\ -3 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (y-4)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(x-1) - 9(y-4) + 0z = 3x - 9y + 33.$$

Общее уравнение плоскости (ABC): $3x-9y+33=0$. Это уравнение можно переписать в виде $x-3y+11=0$, разделив обе его части на 3.

Аналогично найдем общее уравнение плоскости (SBC).

Имеем: $S(\underbrace{3}_{x_1};\ \underbrace{-4}_{y_1};\ \underbrace{0}_{z_1})$, $B(\underbrace{-2}_{x_2};\ \underbrace{3}_{y_2};\ \underbrace{1}_{z_2})$, $C(\underbrace{-5}_{x_3};\ \underbrace{2}_{y_3};\ \underbrace{-1}_{z_3})$. Тогда

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-(-4) & z-0 \\ -2-3 & 3-(-4) & 1-0 \\ -5-3 & 2-(-4) & -1-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z \\ -5 & 7 & 1 \\ -8 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, получим:

$$-13(x-3) - 13(y+4) + 26z = 0 \Leftrightarrow -13x - 13y + 26z - 13 = 0.$$

После деления обеих частей равенства на (–13) получим общее уравнение плоскости (SBC): $x+y-2z+1=0$.

в) Найдем координаты нормальных векторов плоскостей (ABC): $1\cdot x - 3\cdot y + 0\cdot z + 11 = 0$ и (SBC): $1\cdot x + 1\cdot y - 2\cdot z + 1 = 0$:

$$\vec{n}_1 = (1;\ -3;\ 0),\ \vec{n}_2 = (1;\ 1; -2).$$

Далее находим косинус угла между этими плоскостями по стандартной формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|1\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 0\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

г) Найдем длину высоты SH, как расстояние от вершины S до плоскости (ABC). Для этого воспользуемся общим уравнением плоскости (ABC):

$$\underbrace{1}_{A}\cdot x \underbrace{-3}_{B}\cdot y + \underbrace{0}_{C}\cdot z + \underbrace{11}_{D} = 0$$

и формулой расстояния от точки до плоскости:

$$|SH| = \frac{|A\cdot x_S + B\cdot y_S + C\cdot z_S + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1\cdot 3 + (-3)\cdot(-4) + 0\cdot 0 + 11|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+0^2}} = \frac{26}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: а) $AB: \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z}{1}$, $AC: \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z}{1}$, $BC: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{2}$; б) $(ABC): x - 3y + 11 = 0$, $(SBC): x + y - 2z + 1 = 0$; в) $\cos\varphi = 1/\sqrt{15}$ г) $26/\sqrt{10}$.

Задача 3. Составить уравнение плоскости γ, проходящей через точку $M_0(2;\ -1;\ 3)$ перпендикулярно плоскостям $\gamma_1: 3x - 4y + z = 0$ и $\gamma_2: 4y + 7z - 5 = 0$.

Решение. Используем материал лекции 2.1. Схематичный чертеж задачи приведен на рис. 3.

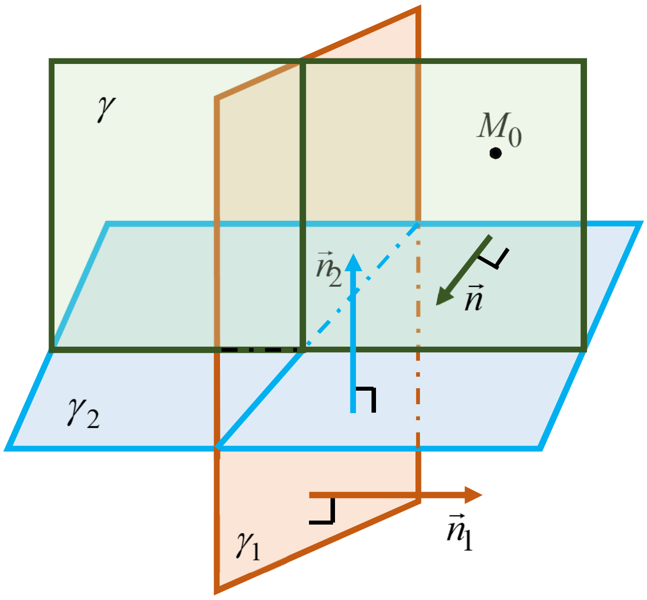

Рис. 3. Чертеж к задаче 3.

Нормальный вектор $\vec{n}$ искомой плоскости γ будет перпендикулярен нормальным векторам $\vec{n}_1 = (3;\ -4;\ 1)$ и $\vec{n}_2 = (0;\ 4;\ 7)$ плоскостей γ_1 и γ_2, соответственно. Следовательно, в качестве нормального вектора плоскости γ можно взять векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Вычислим его:

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -4 & 1\\ 0 & 4 & 7\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 4 & 7\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 7\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & -4\\ 0 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-32\vec{i}-21\vec{j}+12\vec{k}=(-32;\ -21;\ 12).$$

Теперь воспользуемся уравнением (2.1) – уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ с заданным нормальным вектором $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$:

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0.$$

Имеем $\vec{n}=(\underbrace{-32}_{A};\ \underbrace{-21}_{B};\ \underbrace{12}_{C})$, $M_0(\underbrace{2}_{x_0};\ \underbrace{-1}_{y_0},\ \underbrace{3}_{z_0})$. Отсюда

$$\gamma:\ -32\cdot(x-2)-21\cdot(y-(-1))+12\cdot(z-3)=0$$

или

$$32x+21y-12z-7=0.$$

Ответ: $\gamma:\ 32x+21y-12z-7=0$.

Задача 4. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой

$$l:\begin{cases}x-2y+1=0,\\ 3x+y+2z-1=0.\end{cases}$$

Решение. Используем материал текста 2.2.

Прямая l задана общими уравнениями, как линия пересечения двух плоскостей, нормальные векторы которых $\vec{n}_1=(1;\ -2;\ 0)$ и $\vec{n}_2=(3;\ 1;\ 2)$.

Для того, чтобы найти канонические уравнения прямой l вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{q},$$

необходимо найти её направляющий вектор $\vec{s}=(m;\ p;\ q)$ и точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, принадлежащую прямой l.

Направляющий вектор может быть найден по формуле

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2.$$

Тогда

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-4\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}=(-4;\ -2;\ 7).$$

Точку $M_0\in l$ найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases}x-2y+1=0,\\ 3x+y+2z-1=0,\end{cases}$$

которая имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых представляет собой какую-либо точку, лежащую на прямой l. Нам достаточно найти одну из них. Для этого положим $z=-1,5$, хотя неизвестной z можно придать и любое другое значение. Тогда

$$\begin{cases}x-2y+1=0,\\ 3x+y-3-1=0,\\ z=-1,5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-1,\\ 3(2y-1)+y-4=0,\\ z=-1,5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y-1,\\ y=1,\\ z=-1,5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=1,\\ z_0=-1,5.\end{cases}$$

Зная $\vec{s}=(-4;\ -2;\ 7)$ и $M_0(1;\ 1;\ -1,5)$, составляем канонические уравнения прямой l:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1,5}{7}.$$

Ответ: $l:\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1,5}{7}$.

Задача 5. Найти проекцию точки $M_0(-1;\ 2;\ 1)$ на плоскость $\alpha: x-5y+3z-2=0$.

Решение. Используем материал текста 2.2.

Вначале проведем прямую l через точку M_0 перпендикулярно плоскости α (рис. 4). Прямая l пересекает плоскость α в точке M , которая как раз и является проекцией точки M_0 на плоскость α .

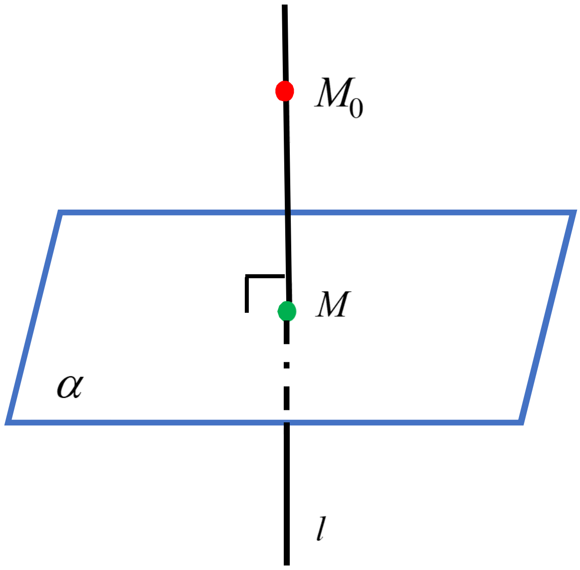

Рис. 4. Чертеж к задаче 5.

Так как прямая l перпендикулярна плоскости α, то нормальный вектор $\vec{n}=(1;\ -5;\ 3)$ плоскости α является направляющим вектором прямой l. Тогда канонические уравнения прямой l, построенные по вектору $\vec{n}$ и точке M_0, будут:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-1}{3}.$$

Теперь перейдем от канонических уравнений прямой l к параметрическим, приравняв каждую дробь канонических уравнений к некоторому параметру t и выразив из полученных равенств переменные $x,\ y,\ z$:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-1}{3}=t \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{1}=t, \\ \dfrac{y-2}{-5}=t, \\ \dfrac{z-1}{3}=t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t-1, \\ y=-5t+2, \\ z=3t+1. \end{cases}$$

Подставим параметрические уравнения прямой в общее уравнение плоскости и найдем значение t, при котором прямая и плоскость будут пересекаться:

$$x-5y+3z-2=0 \Leftrightarrow t-1-5\cdot(-5t+2)+3\cdot(3t+1)-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{7}.$$

Подставим это значение параметра в параметрические уравнения прямой. Получим искомые координаты точки $M\left(-\frac{5}{7};\ \frac{4}{7};\ \frac{13}{7}\right)$.

Ответ: $M\left(-\frac{5}{7};\ \frac{4}{7};\ \frac{13}{7}\right)$.

Задача 6. Найти угол между прямой $l: \frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{7}$ и плоскостью $\beta: 2x-5y+3z-2=0$.

Решение. Используем материал текста 2.2.

Для нахождения угла между прямой и плоскостью в пространстве нужны координаты направляющего вектора прямой $\vec{s}$ и нормального вектора плоскости $\vec{n}$. Из канонических уравнений прямой l находим $\vec{s}=(-4;\ -2;\ 7)$, а из общего уравнения плоскости β получаем $\vec{n}=(2;\ -5;\ 3)$.

Тогда

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|-4\cdot 2+(-2)\cdot(-5)+7\cdot 3|}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+7^2}\cdot\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}}=\frac{23}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{23}{114}}.$$

Отсюда искомый угол $\varphi=\arcsin\sqrt{\frac{23}{114}}$.

Ответ: $\varphi=\arcsin\sqrt{\frac{23}{114}}$.

ЧАСТЬ 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Задача:

Привести уравнения данных кривых к каноническому виду и построить все кривые на одной координатной плоскости.

1. $x^2+y^2-4x-20y+100=0$.
2. $x^2+y^2-4x-8y+4=0$.
3. $9x^2+25y^2-36x+150y+36=0$.

Решение. Используем материал лекции 2.2.

1. В первом уравнении $x^2+y^2-4x-20y+100=0$ выделим полные квадраты относительно переменных x и y:

$$x^2-4x=(x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2)-4=(x-2)^2-4,$$

$$y^2-20y=(y^2-2\cdot y\cdot 10+10^2)-100=(y-10)^2-100.$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$(x-2)^2-4+(y-10)^2-100+100=0.$$

Перенеся свободные члены вправо, получим, что уравнение

$$(x-2)^2+(y-10)^2=4$$

определяет окружность с центром в точке $O_1(2;\ 10)$ и радиусом $R=\sqrt{4}=2$ (на рис. 9.5 выделена темно-синим цветом). Сделав замену переменных

$$x'=x-2,\ y'=y-10,$$

приходим к каноническому уравнению окружности

$$(x')^2+(y')^2=4.$$

2. Рассмотрим уравнение $x^2+y^2-4x-8y+4=0$. Тогда

$$x^2-4x=(x-2)^2-4 \text{ (см. выше)},$$

$$y^2-8y=(y^2-2\cdot y\cdot 4+4^2)-16=(y-4)^2-16.$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$(x-2)^2-4+(y-4)^2-16+4=0.$$

Перенеся свободные члены в правую часть, получим, что уравнение

$$(x-2)^2+(y-4)^2=16$$

определяет окружность с центром в точке $O_2(2;\ 4)$ радиуса $R=\sqrt{16}=4$ (на рис. 5 выделена фиолетовым цветом). Сделав замену переменных

$$x'=x-2,\ y'=y-4,$$

приходим к каноническому уравнению окружности

$$(x')^2+(y')^2=16.$$

3. Рассмотрим последнее уравнение $9x^2 + 25y^2 - 36x + 150y + 36 = 0$. Тогда

$$9x^2 - 36x = 9(x^2 - 4x) = 9((x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - 4) = 9(x-2)^2 - 36,$$

$$25y^2 + 150y = 25(y^2 + 6y) = 25((y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2) - 9) = 25(y+3)^2 - 225.$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$9(x-2)^2 - 36 + 25(y+3)^2 - 225 + 36 = 0.$$

Перенеся свободные члены в правую часть, получим

$$9(x-2)^2 + 25(y+3)^2 = 225.$$

После деления обеих частей уравнения на 225 приходим к выводу, что уравнение

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

определяет смещенный эллипс с центром в точке $O_3(2;\ -3)$, большая полуось которого равна 5, а малая – 3 (на рис. 5 выделен голубым цветом). Сделав замену переменных

$$x' = x - 2,\ y' = y + 3,$$

приходим к каноническому уравнению эллипса

$$\frac{(x')^2}{25} + \frac{(y')^2}{9} = 1.$$

Построив все кривые на одной координатной плоскости, получаем фигуру, похожую на снеговик (рис. 5).

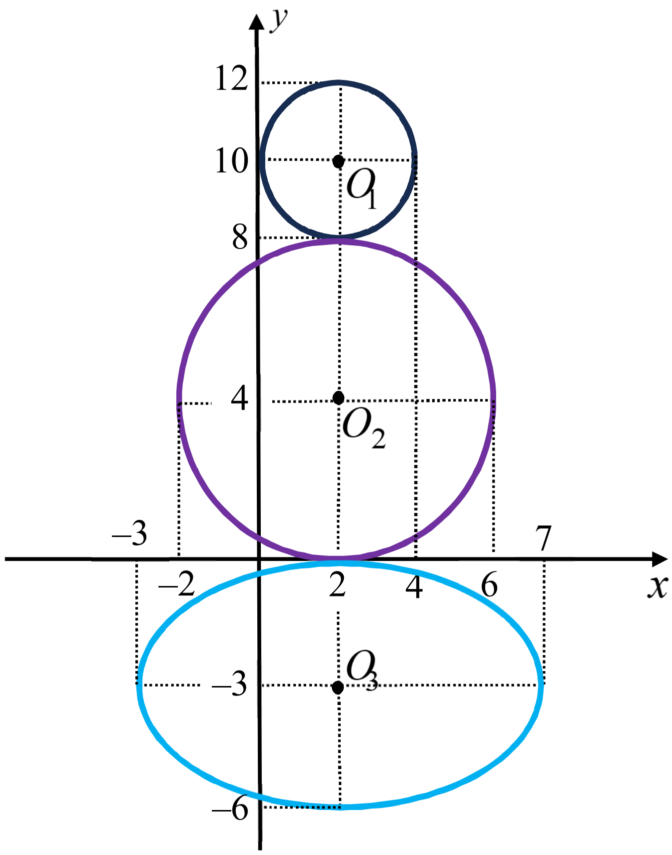

Рис. 5. Чертеж к задаче.