Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 1

Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 1.4

для ГУИМЦ, 2024

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Геометрические векторы

Определение

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются **скалярными** (длина, температура).

Определение
Величины, которые характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением, называются **векторными** (сила, скорость).

Определение

Геометрический вектор — это отрезок с заданным направлением.

Определение

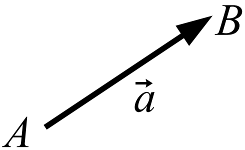
Геометрический вектор – это отрезок с заданным направлением.

Обозначение: $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$.

Определение

Геометрический вектор – это отрезок с заданным направлением.

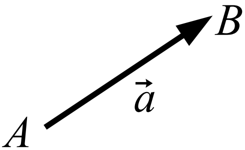
Обозначение: $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$.



Определение

Геометрический вектор – это отрезок с заданным направлением.

Обозначение: $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$.



Здесь A - начало вектора, B - конец вектора.

Виды геометрических векторов:

Виды геометрических векторов:

1. Если точка приложения вектора не фиксирована, то вектор называется **свободным**.

Геометрические векторы

Виды геометрических векторов:

1. Если точка приложения вектора не фиксирована, то вектор называется **свободным**.
2. Если точку приложения вектора можно перемещать только вдоль прямой, то вектор называется **скользящим**.

Виды геометрических векторов:

1. Если точка приложения вектора не фиксирована, то вектор называется **свободным**.
2. Если точку приложения вектора можно перемещать только вдоль прямой, то вектор называется **скользящим**.
3. Если точка приложения вектора фиксирована, то вектор называется **связанным**.

Определение
Длиной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Определение

Длиной (**модулем**) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение: $\vec{0}$.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение: $\vec{0}$.

Нулевой вектор направления не имеет.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение: $\vec{0}$.

Нулевой вектор направления не имеет.

Определение

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Геометрические векторы

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение: $\vec{0}$.

Нулевой вектор направления не имеет.

Определение

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Обозначение: $\vec{e}$.

Определение
Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$.

Определение

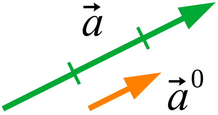
Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{a}^0$.

Определение

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{a}^{\,0}$.



$$|\vec{a}| = 3,\ |\vec{a}^{\,0}| = 1$$

Определение

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Определение

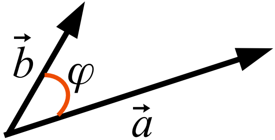
Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Обозначение: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, φ.

Определение

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

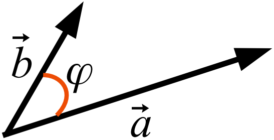
Обозначение: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, φ.



Определение

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Обозначение: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$, φ.



$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

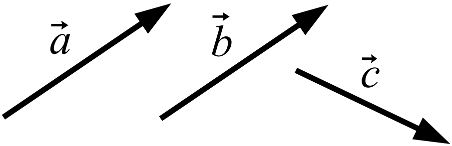
Определение
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними прямой.

Определение
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними прямой.
Обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Определение
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.
Обозначение: $\vec{a} || \vec{b}$.

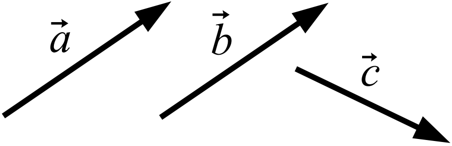
Определение
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.
Обозначение: $\vec{a} || \vec{b}$.



Определение

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Обозначение: $\vec{a} || \vec{b}$.



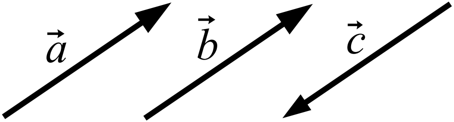
$\vec{a} \parallel \vec{b}$

$\vec{a} \nparallel \vec{c}$

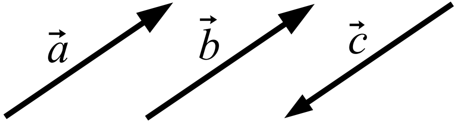
$\vec{b} \nparallel \vec{c}$

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или **противоположно направлены** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или **противоположно направлены** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).



Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или **противоположно направлены** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).

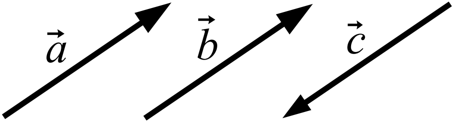


$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$

$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или **противоположно направлены** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).



$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$
$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$

Нулевой вектор считается одновременно коллинеарным и ортогональным любому вектору.

Определение
Три вектора в пространстве называются **компланарными,** если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Определение

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.

Определение

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.

Обозначение: $\vec{a} = \vec{b}$.

Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся:

Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся:

1) сложение векторов;

К линейным операциям относятся:

1) сложение векторов;

2) умножение вектора на число.

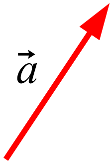
Определение
Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, направленный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что $\vec{b}$ приложен к концу $\vec{a}$.

Определение
Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, направленный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что $\vec{b}$ приложен к концу $\vec{a}$.
Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

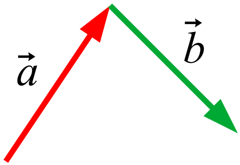
Линейные операции над векторами

Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:

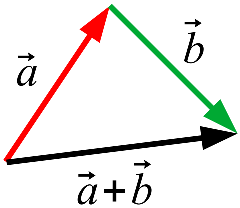
Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ **на число** λ называется такой вектор $\vec{c}$, что

1) $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$, и $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ **на число** λ называется такой вектор $\vec{c}$, что

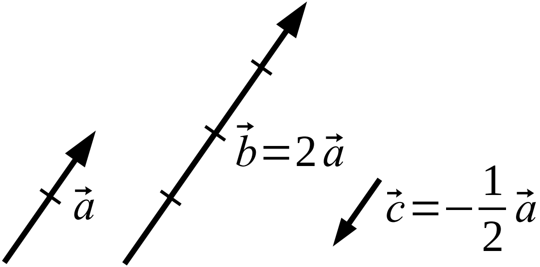
1) $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$, и $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a}$ или $\vec{c} = \lambda\vec{a}$.

Линейные операции над векторами

Примеры:



Свойства линейных операций над векторами:

Свойства линейных операций над векторами:

1) коммутативный закон сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

Свойства линейных операций над векторами:

1) коммутативный закон сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

2) ассоциативный закон сложения векторов

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

Свойства линейных операций над векторами:

1) коммутативный закон сложения векторов

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$

2) ассоциативный закон сложения векторов

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}),$$

3) ассоциативный закон умножения вектора на число относительно умножения чисел

$$\alpha\,(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\,\vec{a}=\beta\,(\alpha\vec{a}),$$

Свойства линейных операций над векторами:

4) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения векторов

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

Свойства линейных операций над векторами:

4) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения векторов

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

5) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения чисел

$$(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a},$$

Свойства линейных операций над векторами:

6) умножение на ноль

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0},$$

Свойства линейных операций над векторами:

6) умножение на ноль

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0},$$

7) сложение с нулевым вектором

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Следствия из свойств линейных операций:

Следствия из свойств линейных операций:

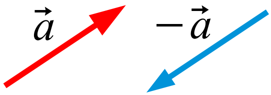
1. Вектор $-\vec{a}$, называемый **противоположным** вектору $\vec{a}$, определяется как

$$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}.$$

Следствия из свойств линейных операций:

1. Вектор $-\vec{a}$, называемый **противоположным** вектору $\vec{a}$, определяется как

$$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}.$$



Следствия линейных операций:

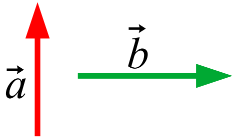
2. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$, называемый **разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Следствия линейных операций:

2. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$, называемый **разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



Следствия линейных операций:

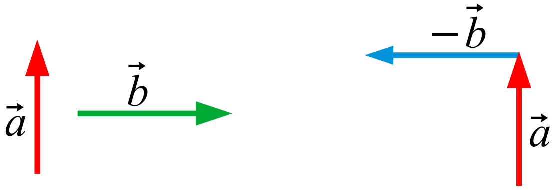
2. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$, называемый **разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Следствия линейных операций:

2. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$, называемый **разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, определяется как

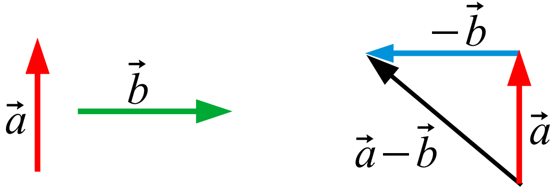
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



Следствия линейных операций:

2. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$, называемый **разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



Линейная зависимость векторов

Определение

Выражение

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$$

называется **линейной комбинацией векторов** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$,

Линейная зависимость векторов

Определение

Выражение

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$$

называется **линейной комбинацией векторов** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$,

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - любые действительные числа, называемые **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение

Будем говорить, что **вектор $\vec{b}$ разлагается (линейно выражается) по векторам** $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации.

Определение

Будем говорить, что **вектор $\vec{b}$ разлагается (линейно выражается) по векторам** $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации. Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называются **коэффициентами разложения** вектора $\vec{b}$ по системе векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$.

Линейная зависимость векторов

Определение

Линейная комбинация векторов называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Линейная зависимость векторов

Определение

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.

Определение

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется **линейно независимой**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору.

Теорема (критерий линейной зависимости векторов)

Теорема (критерий линейной зависимости векторов)

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-либо из векторов этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Линейная зависимость векторов

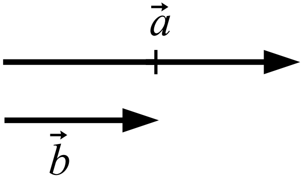
Примеры:

Примеры:

1.

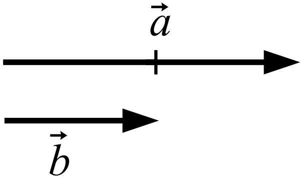
Примеры:

1\.



Примеры:

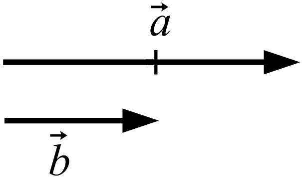
1.



Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через вектор $\vec{b}$ в виде $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$.

Примеры:

1.



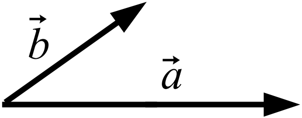
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через вектор $\vec{b}$ в виде $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$. Тогда для $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

Примеры:

2.

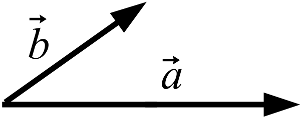
Примеры:

2.



Примеры:

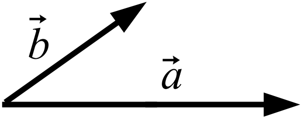
2.



Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, т.к. вектор $\vec{a}$ нельзя выразить через вектор $\vec{b}$.

Примеры:

2.



Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, т.к. вектор $\vec{a}$ нельзя выразить через вектор $\vec{b}$. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно составить лишь тривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

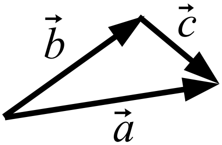
Линейная зависимость векторов

Примеры:

3.

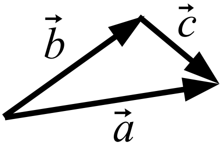
Примеры:

3.



Примеры:

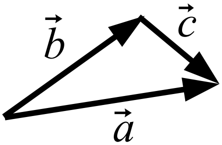
3.



Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Примеры:

3.



Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Тогда $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

1. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

Линейная зависимость векторов

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

1. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2. Если система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ линейно независима, то любая часть этой системы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_s$ $(s < n)$ линейно независима.

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

3. Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависима, то любая дополненная система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, $\vec{a}_{n+1}$, ..., $\vec{a}_{n+m}$ линейно зависима.

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

4. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Линейная зависимость векторов

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

4. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

5. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Линейная зависимость векторов

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

4. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
5. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.
6. Любые четыре вектора линейно зависимы.