Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 1

Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 1.3

для ГУИМЦ, 2024

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Системы линейных алгебраических уравнений

Определение

Системой из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (сокращенно СЛАУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где

числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ - это **коэффициенты системы**,

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где

числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ - это **коэффициенты системы**,

числа $b_1, \ldots, b_m$ - **свободные члены**,

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где

числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ - это **коэффициенты системы**,

числа $b_1, \ldots, b_m$ - **свободные члены**,

$x_1, \ldots, x_n$ - **неизвестные**, которые надо определить.

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Приведенная выше форма записи СЛАУ называется **координатной**.

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Из элементов СЛАУ сформируем матрицы:

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Из элементов СЛАУ сформируем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Из элементов СЛАУ сформируем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы,

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Из элементов СЛАУ сформируем матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Из элементов СЛАУ сформируем матрицы:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов,

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Из элементов СЛАУ сформируем матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Из элементов СЛАУ сформируем матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных.

Системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Тогда СЛАУ можно переписать в **матричной** форме

$$A \cdot X = B.$$

Определение

Расширенной матрицей системы называется матрица $\widetilde{A}$ вида

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}_{A} & \underbrace{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{matrix}}_{B} \end{array}\right).$$

Определение

СЛАУ называется **однородной**, если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, в противном случае она называется **неоднородной**.

Определение

Решением СЛАУ называется такой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, который при подстановке в каждое уравнение системы обращает его в верное тождество.

Определение

СЛАУ называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если решений не имеет.

Определение

Совместная СЛАУ называется **определенной**, если она имеет единственное решение,

Определение

Совместная СЛАУ называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет бесконечно много решений.

Определение

Совместная СЛАУ называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет бесконечно много решений.

В последнем случае каждое конкретное решение называется **частным** решением системы.

Определение
Совокупность всех частных решений называется **общим** решением системы.

Определение

Неизвестные, коэффициенты при которых образуют базисный минор матрицы системы, называются **базисными**. Остальные неизвестные называются **свободными**.

Критерий совместности СЛАУ

Критерий совместности СЛАУ

Теорема Кронекера-Капелли

(о совместности СЛАУ)

Критерий совместности СЛАУ

Теорема Кронекера-Капелли

(о совместности СЛАУ)

Для совместности СЛАУ необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был равен рангу ее расширенной матрицы $\widetilde{A}$.

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система является определенной.

Критерий совместности СЛАУ

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система является определенной.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система является неопределенной.

Методы решения невырожденных СЛАУ

Методы решения невырожденных СЛАУ

Рассмотрим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

Рассмотрим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Такие СЛАУ называются **квадратными**, поскольку в их матричной форме записи

$$A \cdot X = B$$

матрица A получается квадратной.

Определение

Если $\det A \neq 0$, то квадратная СЛАУ называется **невырожденной**.

Методы решения невырожденных СЛАУ

Определение

Если $\det A \neq 0$, то квадратная СЛАУ называется **невырожденной**.

Теорема (о существовании решения квадратной СЛАУ)

Определение

Если $\det A \neq 0$, то квадратная СЛАУ называется **невырожденной**.

Теорема (о существовании решения квадратной СЛАУ)

Квадратная СЛАУ имеет решение и притом единственное, если она является невырожденной.

Пусть $\det A \neq 0$.

Пусть $\det A \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим:

Пусть $\det A \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Методы решения невырожденных СЛАУ

Пусть $\det A \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Отыскание решения невырожденной СЛАУ по данной формуле называется **матричным методом решения**.

Распишем полученную ранее формулу для X поэлементно:

Распишем полученную ранее формулу для X поэлементно:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Распишем полученную ранее формулу для X поэлементно:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*} \cdot B$$

Распишем полученную ранее формулу для X поэлементно:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*} \cdot B =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Методы решения невырожденных СЛАУ

По теореме разложения определителя

Методы решения невырожденных СЛАУ

По теореме разложения определителя k-ый элемент получившегося вектора есть разложение по k-ому столбцу определителя, По теореме разложения определителя k-ый элемент получившегося вектора есть разложение по k-ому столбцу определителя, полученного из определителя матрицы A заменой k-ого столбца столбцом свободных членов B.

Отсюда получаем формулы для вычисления решения:

Отсюда получаем формулы для вычисления решения:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Методы решения невырожденных СЛАУ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Методы решения невырожденных СЛАУ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Методы решения невырожденных СЛАУ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots.$$

Данные формулы называются

формулами Крамера,

Данные формулы называются **формулами Крамера**, а метод решения невырожденных СЛАУ по этим формулам – **методом Крамера**.

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.

Последовательно, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, находятся все неизвестные.

Пример: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Пример: Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Прямой ход

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim}$$

(1) из второй строки вычитаем первую, умноженную на 2,

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right)$$

(1) из второй строки вычитаем первую, умноженную на 2,

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right)$$

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left.\begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 10 \\ -4 \end{matrix}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 10 \\ -24 \end{matrix}\right.\right)$$

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right)$$

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\overset{(1)}{\sim}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim}$$

(2) вторую строку делим на 3.

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

(2) вторую строку делим на 3.

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

2. Находим ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\widetilde{A}$ по эквивалентным им ступенчатым матрицам,

2. Находим ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы $\widetilde{A}$ по эквивалентным им ступенчатым матрицам, причем ступенчатая матрица для A получается путем удаления из ступенчатой матрицы для $\widetilde{A}$ последнего столбца.

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Если $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right)$,

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Если $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right)$,то $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Если $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right)$,то $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Получаем, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$.

Если $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right)$,то $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Получаем, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$. По теореме Кронекера-Капелли система совместна.

Если $\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right)$, то $A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Получаем, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$. По теореме Кронекера-Капелли система совместна.

Поскольку количество неизвестных $n = 3$ больше ранга матрицы $r(A) = 2$, то система является неопределенной, т.е. имеет бесконечно много решений.

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A.

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок.

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов.

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2^{(б)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A.
Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2^{(б)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2^{(6)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Если бы этот определитель оказался равен нулю, то нам было бы необходимо выбрать другие столбцы.

4. Определяем базисные неизвестные.

4. Определяем базисные неизвестные.
Поскольку мы включили в базисный минор первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут x_1 и x_2.

4. Определяем базисные неизвестные. Поскольку мы включили в базисный минор первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут x_1 и x_2. Оставшаяся неизвестная x_3 будет свободной.

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\widetilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

6. Положим, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c - произвольная постоянная,

6. Положим, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c - произвольная постоянная, и перенесем в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:

6. Положим, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c - произвольная постоянная, и перенесем в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - c, \\ \qquad\quad x_2 = -8 - c. \end{cases}$$

Введение произвольной постоянной c обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых берутся базисные неизвестные x_1 и x_2.

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Введение произвольной постоянной c обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых берутся базисные неизвестные x_1 и x_2. Свободная неизвестная x_3 может принимать любые значения, однозначно ее найти нельзя.

Обратный ход

Обратный ход

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Обратный ход

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$

Обратный ход

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$

$$x_1 = 10 - c + 2x_2$$

Обратный ход

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$

$$x_1 = 10 - c + 2x_2 = -6 - 3c.$$

8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы,

8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы, т.е. содержит в себе все частные решения, которые получаются путем придания произвольной постоянной c конкретных значений.

Например, положив $c = 0$, получим конкретное частное решение

$$\begin{cases} x_1 = -6, \\ x_2 = -8, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$