Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 1

Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 1.2

для ГУИМЦ, 2024

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

Обратная матрица

Определение

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля, и **вырожденной**, если он равен нулю.

Обратная матрица

Определение

Матрицей, **присоединенной или союзной** к квадратной матрице A, называется матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A, причем алгебраические дополнения элементов i-ой строки записываются в i-ый столбец.

Обратная матрица

Определение

Матрицей, **присоединенной или союзной** к квадратной матрице A, называется матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A, причем алгебраические дополнения элементов i-ой строки записываются в i-ый столбец.

Обозначение: A^*.

Обратная матрица

Пример:

Обратная матрица

Пример:

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

Пример:

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Определение

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** квадратной матрице A, если выполнено условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы)

Обратная матрица

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы)
Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица A является невырожденной.

Свойства обратной матрицы:

Свойства обратной матрицы:

1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;

Обратная матрица

Свойства обратной матрицы:

1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

Обратная матрица

Свойства обратной матрицы:

1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

Свойства обратной матрицы:

1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;

2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

4) $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

Обратная матрица

Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1}*:*

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1}:

1. Вычислить определитель данной матрицы A.

Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1}*:*

1. Вычислить определитель данной матрицы A. Если он отличен от нуля, то обратная матрица существует.

Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1}*:*

1. Вычислить определитель данной матрицы A. Если он отличен от нуля, то обратная матрица существует.
2. Вычислить алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и составить из них присоединенную матрицу A^*.

Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1}*:*

3. Вычислить обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Обратная матрица

Пошаговый алгоритм нахождения матрицы A^{-1}*:*

3. Вычислить обратную матрицу по формуле
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$
4. Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример:

Обратная матрица

Пример: Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} =$

$A_{12} =$

$A_{13} =$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} =$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} =$

$A_{12} =$

$A_{13} =$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} =$$

$$A_{13} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$A_{13} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{13} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = -10$$

$$A_{13} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = -10$$

$$A_{13} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = -10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4$$

$$A_{12} = -10$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} =$

$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} =$

$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & {\color{red}0} & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$

$A_{12} = -10 \quad {\color{red}A_{22}} =$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4$ $A_{21} = 12$

$A_{12} = -10$ $A_{22} =$

$A_{13} = -4$ $A_{23} =$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & \color{red}{0} & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$

$A_{12} = -10 \quad \color{red}{A_{22}} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$

$A_{12} = -10 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 28$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$

$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$

$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} =$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 11$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} =$

$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4$ $\quad A_{21} = 12$ $\quad A_{31} =$

$A_{12} = -10$ $\quad A_{22} = 28$ $\quad A_{32} =$

$A_{13} = -4$ $\quad A_{23} = 11$ $\quad A_{33} =$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ \color{red}{1} & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad \color{red}{A_{31}} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & {\color{red}-2} & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$

$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad {\color{red}A_{32}} =$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & {\color{red}-2} & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad {\color{red}A_{32}} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & {\color{red}-2} & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad {\color{red}A_{32}} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} =$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & \color{red}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$

$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$

$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad \color{red}{A_{33}} =$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$A_{11} = -4$ $\quad A_{21} = 12$ $\quad A_{31} = 2$

$A_{12} = -10$ $\quad A_{22} = 28$ $\quad A_{32} = 4$

$A_{13} = -4$ $\quad A_{23} = 11$ $\quad A_{33} =$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Обратная матрица

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 2 \neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \left(\quad \right)$$

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & & \\ -10 & & \\ -4 & & \end{pmatrix}$$

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 12 & \\ -10 & 28 & \\ -4 & 11 & \end{pmatrix}$$

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

Алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -4 \quad A_{21} = 12 \quad A_{31} = 2$$

$$A_{12} = -10 \quad A_{22} = 28 \quad A_{32} = 4$$

$$A_{13} = -4 \quad A_{23} = 11 \quad A_{33} = 2$$

Присоединенная матрица:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Решение

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Делаем проверку:

Решение

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Делаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Обратная матрица

Рассмотрим альтернативный способ вычисления обратной матрицы, не требующий вычисления определителей, – **метод элементарных преобразований** (метод Жордана-Гаусса).

Алгоритм метода элементарных преобраз.:

Обратная матрица

Алгоритм метода элементарных преобраз.:

1. Проверить, что $\det A$ отличен от нуля.

Алгоритм метода элементарных преобраз.:

1. Проверить, что $\det A$ отличен от нуля.
2. Составить матрицу $D = (A|E)$, приписав к исходной матрице A справа единичную матрицу E того же порядка.

Обратная матрица

Алгоритм метода элементарных преобраз.:
3. Элементарными преобразованиями строк преобразовать матрицу D так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу, тогда правая половина превратится в обратную матрицу A^{-1}.

Обратная матрица

Алгоритм метода элементарных преобраз.:

3. Элементарными преобразованиями строк преобразовать матрицу D так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу, тогда правая половина превратится в обратную матрицу A^{-1}.

4. Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример:

Обратная матрица

Пример: Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Обратная матрица

Решение

$$\det A = 1$$

Решение

$$\det A = 1 \neq 0$$

Решение

$$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Обратная матрица

Решение

$$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Составим матрицу D:

Решение

$$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Составим матрицу D:

$$D = (A|E)$$

Обратная матрица

Решение

$$\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Составим матрицу D:

$$D = (A|E) = \underbrace{\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix}\right.}_{A}\underbrace{\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)}_{E}$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim}$$

(1) из элементов второй и третьей строк вычитаем соответствующие элементы первой строки;

Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1) из элементов второй и третьей строк вычитаем соответствующие элементы первой строки;

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left.\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim}$$

(2) из элементов третьей строки вычитаем соответствующие элементы второй строки;

Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

(2) из элементов третьей строки вычитаем соответствующие элементы второй строки;

Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left.\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\begin{matrix}0&0\\1&0\\0&1\end{matrix}\Bigg) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim}$$

(3) из элементов второй строки вычитаем соответствующие элементы третьей строки, умноженные на 2.

Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

(3) из элементов второй строки вычитаем соответствующие элементы третьей строки, умноженные на 2.

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left.\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Обратная матрица

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\overset{(3)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(E|A^{-1}\right)$$

Решение

Выполним элементарные преобразования над строками матрицы D:

$$\overset{(3)}{\sim} \underbrace{\left(\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right.}_{E}\underbrace{\left|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{matrix}\right)}_{A^{-1}} = \left(E|A^{-1}\right)$$

Решение

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Делаем проверку:

Решение

Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Делаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Простейшие матричные уравнения

Определение

Простейшими матричными уравнениями называются уравнения вида

$$AX = C,\ XB = C,\ AXB = C,$$

где A, B, C - известные матрицы, причем A, B - квадратные и невырожденные, а X - неизвестная.

Определение

Решением матричного уравнения называется такая матрица X, которая при подстановке в данное уравнение обращает его в верное тождество.

Простейшие матричные уравнения

Простейшие матричные уравнения решаются путем умножения их левой и правой частей на матрицу, обратную одной из известных матриц A и B.

Простейшие матричные уравнения

Простейшие матричные уравнения решаются путем умножения их левой и правой частей на матрицу, обратную одной из известных матриц A и B. Поскольку при умножении матриц множители нельзя менять местами, обе части уравнения умножаются одновременно на обратную матрицу с той стороны, с которой стоит известная матрица.

Простейшие матричные уравнения

1. $AX = C$.

Простейшие матричные уравнения

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X.

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

Простейшие матричные уравнения

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}C,$$

Простейшие матричные уравнения

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}C,$$

$$EX = A^{-1}C,$$

Простейшие матричные уравнения

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}C,$$

$$EX = A^{-1}C,$$

$$X = A^{-1}C.$$

Простейшие матричные уравнения

2. $XB = C$.

Простейшие матричные уравнения

2. $XB = C$.

Здесь матрица B стоит справа от X.

2. $XB = C$.

Здесь матрица B стоит справа от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

2. $XB = C$.

Здесь матрица B стоит справа от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

$$XBB^{-1} = CB^{-1},$$

Простейшие матричные уравнения

2. $XB = C$.

Здесь матрица B стоит справа от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

$$XBB^{-1} = CB^{-1},$$

$$XE = CB^{-1},$$

2. $XB = C$.

Здесь матрица B стоит справа от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

$$XBB^{-1} = CB^{-1},$$

$$XE = CB^{-1},$$

$$X = CB^{-1}.$$

Простейшие матричные уравнения

3. $AXB = C$.

3. $AXB = C$.

Обе части уравнения умножаем слева на A^{-1} и справа на B^{-1}:

Простейшие матричные уравнения

3. $AXB = C$.

Обе части уравнения умножаем слева на A^{-1} и справа на B^{-1}:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

3. $AXB = C$.

Обе части уравнения умножаем слева на A^{-1} и справа на B^{-1}:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Пример:

Пример: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Пример: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Простейшие матричные уравнения

Тогда наше уравнение можно переписать в символьном виде:

$$AX = C.$$

Простейшие матричные уравнения

Тогда наше уравнение можно переписать в символьном виде:

$$AX = C.$$

Откуда имеем:

$$X = A^{-1}C.$$

Простейшие матричные уравнения

Находим обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot C$$

Простейшие матричные уравнения

Находим обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Простейшие матричные уравнения

Находим обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$