# Аналитическая геометрия
# Модуль 1
## Матричная алгебра. Векторная алгебра
# Лекция 1.5
## (для ГУИМЦ, 2024)

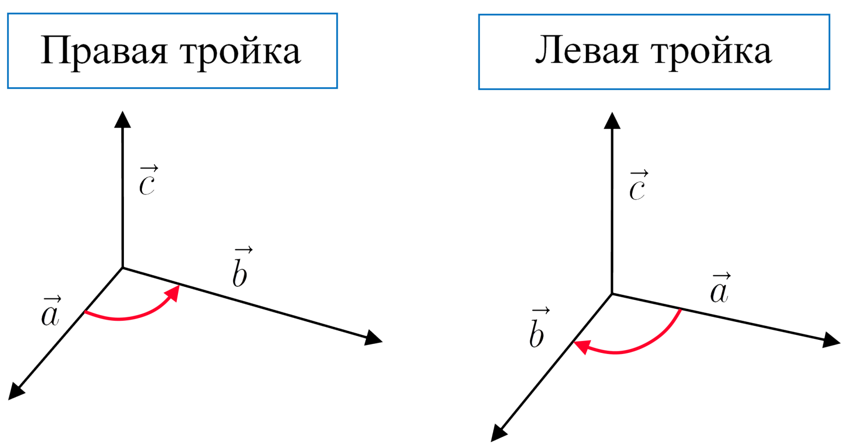

**Аннотация**

Ориентация векторов в пространстве. Правая и левая тройки векторов. Определения векторного и смешанного произведений векторов, их свойства, геометрический и механический смыслы и практические приложения.


# 1 Векторное произведение векторов

*Определение*

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.




© Меньшова И.В., 2024

Так как три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве, то все базисы в пространстве делятся на два класса: **класс правых базисов** и **класс левых базисов**. Класс, к которому относится фиксированный базис, определяет его **ориентацию**.

*Определение*

**Векторным произведением** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

*Алгебраические свойства векторного произведения:*

1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

2) дистрибутивный закон

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

3) ассоциативный закон относительно числового множителя

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}),\ \lambda \in R.$$

*Геометрическое свойство векторного произведения:*

Векторное произведение двух векторов равняется нулевому вектору тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны, т.е.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}||\vec{b}.$$

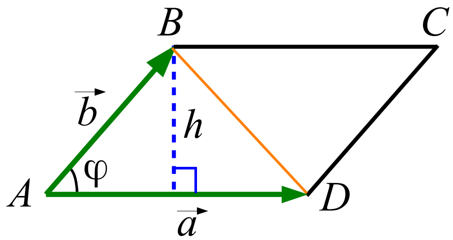
*Теорема (векторное произведение в координатной форме)*

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

*Геометрический смысл векторного произведения:*

Построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм $ABCD$:




Площадь параллелограмма $ABCD$ равна

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin\varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

или коротко

$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Эта формула задает *геометрический смысл векторного произведения* – модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть площадь параллелограмма, построенного на данных векторах.

Также можно получить, что высота параллелограмма $ABCD$ есть

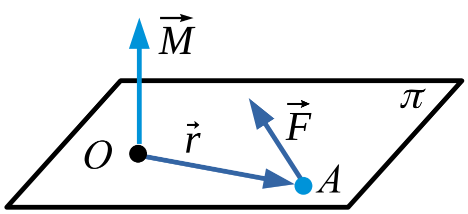
$$h = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

В свою очередь, площадь треугольника $ABD$ равна половине площади параллелограмма $ABCD$:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

*Механический смысл векторного произведения:*

Пусть на частицу $A$ действует сила $\vec{F}$. Положение этой частицы в пространстве в каждый момент времени задается ее радиус-вектором $\vec{r}$ относительно некоторой фиксированной точки $O$ (полюса).




Вектор $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ называется **моментом силы** $\vec{F}$ относительно точки $O$ и характеризует способность силы вращать частицу $A$ вокруг точки $O$ в плоскости $\pi$, содержащей точку $O$ и силу $\vec{F}$.

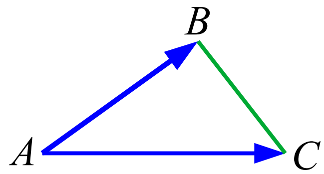
*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами

$$A(5;2;-1),\ B(3;1;-2) \text{ и } C(4;-2;2).$$

*Решение.*

Треугольник $ABC$ построен на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.




Воспользуемся формулой:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

1. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3-5;1-2;-2-(-1)) = (-2;-1;-1),$$
$$\overrightarrow{AC} = (4-5;-2-2;2-(-1)) = (-1;-4;3).$$

2. Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$
$$= -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k} = (-7;7;7).$$

3. Найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 7^2} = \frac{7}{2}\sqrt{3} \text{ (кв. ед)}. \blacksquare$$

II. Найти площадь параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n},$$

где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол $30^\circ$.

*Решение.*

Воспользуемся формулой:

$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) =$$
$$= 2\underbrace{(\vec{m} \times \vec{m})}_{\vec{0}} + \vec{m} \times \vec{n} + 4\underbrace{(\vec{n} \times \vec{m})}_{-(\vec{m}\times\vec{n})} + 2\underbrace{(\vec{n} \times \vec{n})}_{\vec{0}} =$$
$$= \vec{m} \times \vec{n} - 4(\vec{m} \times \vec{n}) = -3(\vec{m} \times \vec{n}).$$

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |-3(\vec{m} \times \vec{n})| = |-3| \cdot |\vec{m} \times \vec{n}| =$$
$$= 3 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin 30 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = 1,5.$$

3. Найдем площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}| = 1,5 \text{ (кв.ед)}. \blacksquare$$

# 2 Смешанное произведение векторов

*Определение*

Если вектор $\vec{a}$ векторно умножить на вектор $\vec{b}$, а полученный вектор скалярно умножить на вектор $\vec{c}$, то получится число, называемое **смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначение: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

*Алгебраические свойства смешанного произведения:*

1) в смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

2) дистрибутивный закон

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c},$$

3) ассоциативный закон относительно числового множителя

$$(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(\lambda\vec{c}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c}),\ \lambda \in R.$$

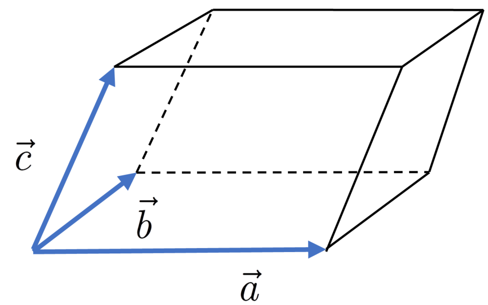
*Геометрическое свойство смешанного произведения:*

Смешанное произведение трех векторов равняется нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$

*Геометрический смысл смешанного произведения:*

На трех некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, выходящих из одной точки, построим параллелепипед.




Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому по модулю:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, есть

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

*Теорема (смешанное произведение в координатной форме)*

Пусть заданы три вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

*Приложение смешанного произведения:*

Взаимная ориентация векторов в пространстве:

1) если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая,

2) если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая.

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки

$M_1(2;5;3)$, $M_2(3;7;4)$, $M_3(-5;5;-1)$, $M_4(-4;-3;0)$.

*Решение.*

1. Найдем векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M_4}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-2; 7-5; 4-3) = (1; 2; 1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5-2; 5-5; -1-3) = (-7; 0; -4),$$
$$\overrightarrow{M_1M_4} = (-4-2; -3-5; 0-3) = (-6; -8; -3).$$

2. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Отсюда на основании геометрического свойства смешанного произведения делаем вывод, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ не являются компланарными, т.е не лежат в одной плоскости. Это значит, что точки $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ также не лежат в одной плоскости. ■