Аналитическая геометрия
Модуль 1
Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.4
(для ГУИМЦ, 2024)

Аннотация

Геометрические векторы и их виды. Линейные операции над векторами (сложение двух векторов и умножение вектора на число) и их свойства. Линейная зависимость векторов, критерий линейной зависимости и свойства систем линейно зависимых и независимых векторов.

1 Геометрические векторы

Определение

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются **скалярными** (длина, температура).

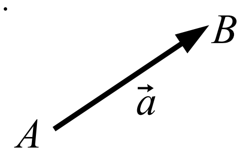
Определение

Величины, которые характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением, называются **векторными** (сила, скорость).

Определение

Геометрический вектор – это отрезок с заданным направлением.

Обозначение: $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$.



Здесь A - начало вектора, B - конец вектора.

Виды геометрических векторов:

1. Если точка приложения вектора не фиксирована, то вектор называется **свободным**.

2. Если точку приложения вектора можно перемещать только вдоль прямой, то вектор называется **скользящим**.

3. Если точка приложения вектора фиксирована, то вектор называется **связанным**.

Определение

Длиной (**модулем**) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение: $\vec{0}$.

Нулевой вектор направления не имеет.

Определение

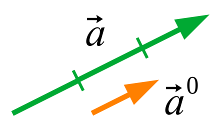
Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Обозначение: $\vec{e}$.

Определение

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{a}^{\,0}$.

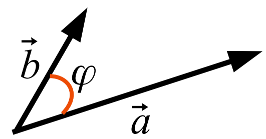


$|\vec{a}| = 3, |\vec{a}^{\,0}| = 1$

Определение

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Обозначение: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, φ.



$$0 \le \varphi \le \pi$$

Определение

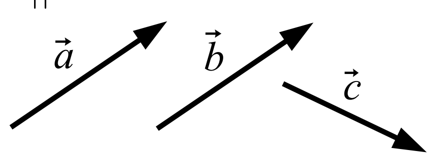
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **ортогональными**, если угол между ними прямой.

Обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Определение

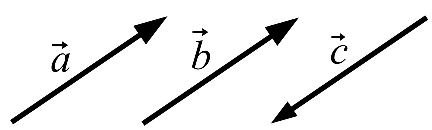
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Обозначение: $\vec{a}||\vec{b}$.



$\vec{a} \parallel \vec{b}$
$\vec{a} \nparallel \vec{c}$
$\vec{b} \nparallel \vec{c}$

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) или **противоположно направлены** ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$).



$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$
$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$

Нулевой вектор считается одновременно коллинеарным и ортогональным любому вектору.

Определение

Три вектора в пространстве называются **компланарными,** если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Определение

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.

Обозначение: $\vec{a} = \vec{b}$.

2 Линейные операции над векторами

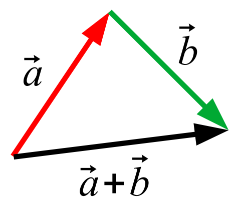
К линейным операциям относятся:
1) сложение векторов;
2) умножение вектора на число.

Определение

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, направленный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что $\vec{b}$ приложен к концу $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:

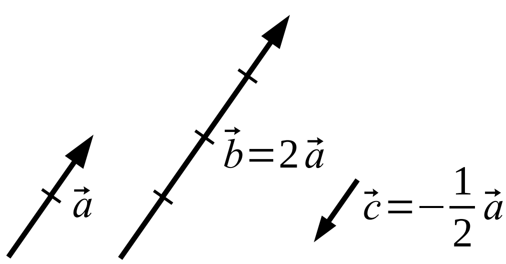


Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ **на число** λ называется такой вектор $\vec{c}$, что
1) $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$, и $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a}$ или $\vec{c} = \lambda\vec{a}$.

Примеры:

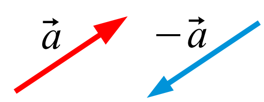


Свойства линейных операций над векторами:

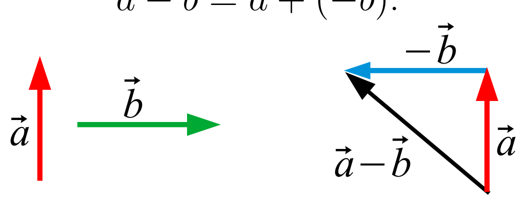
1) коммутативный закон сложения векторов
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$
2) ассоциативный закон сложения векторов
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}),$$
3) ассоциативный закон умножения вектора на число относительно умножения чисел
$$\alpha\,(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\,\vec{a}=\beta\,(\alpha\vec{a}),$$
4) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения векторов
$$\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b},$$
5) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения чисел
$$(\alpha+\beta)\,\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a},$$
6) умножение на ноль
$$0\cdot\vec{a}=\vec{0},$$
7) сложение с нулевым вектором
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Следствия из свойств линейных операций:

1. Вектор $-\vec{a}$, называемый **противоположным** вектору $\vec{a}$, определяется как
$$-\vec{a}=(-1)\cdot\vec{a}.$$



2. Вектор $\vec{a}-\vec{b}$, называемый **разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, определяется как
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$



3 Линейная зависимость векторов

Определение

Выражение $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией векторов** $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - любые действительные числа, называемые **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение

Будем говорить, что **вектор $\vec{b}$ разлагается (линейно выражается) по векторам** $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации. Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называются **коэффициентами разложения** вектора $\vec{b}$ по системе векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$.

Определение

Линейная комбинация векторов называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Определение

Система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.

Определение

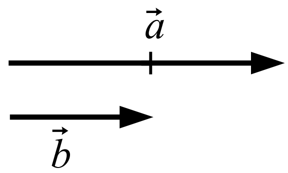
Система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ называется **линейно независимой**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору.

Теорема (критерий линейной зависимости векторов)

Система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-либо из векторов этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных.

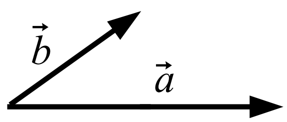
Примеры:

1.



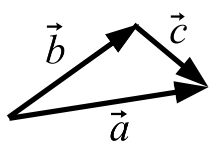
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через вектор $\vec{b}$ в виде $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$. В этом случае для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

2.



Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, т.к. вектор $\vec{a}$ нельзя выразить через вектор $\vec{b}$. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно составить лишь тривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

3.



Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Тогда $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

1. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2. Если система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ линейно независима, то любая часть этой системы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_s$ $(s < n)$ линейно независима.

3. Если система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n$ линейно зависима, то любая дополненная система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, $\vec{a}_{n+1}$, ..., $\vec{a}_{n+m}$ линейно зависима.

4. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

5. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

6. Любые четыре вектора линейно зависимы.