

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица системы,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – столбец свободных членов,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных.}$$

Определение

Расширенной матрицей системы называется матрица \tilde{A} вида

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

В этой матрице вертикальная черта используется исключительно для визуального выделения последнего столбца, какого-либо функционального значения она не имеет.

Определение

СЛАУ называется **однородной**, если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, в противном случае она называется **неоднородной**.

Определение

Решением СЛАУ называется такой набор значений неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n , который при подстановке в каждое уравнение системы обращает его в верное тождество.

Определение

СЛАУ называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если решений не имеет.

Определение

Совместная СЛАУ называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет бесконечно много решений. В последнем случае каждое конкретное решение называется **частным** решением системы.

Определение

Совокупность всех частных решений называется **общим** решением системы.

Определение

Неизвестные, коэффициенты при которых образуют базисный минор матрицы системы, называются **базисными**. Остальные неизвестные называются **свободными**.

2 Критерий совместности СЛАУ

Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)

Для совместности СЛАУ необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A был равен рангу ее расширенной матрицы \tilde{A} .

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система является определенной.
2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система является неопределенной.

3 Методы решения невырожденных СЛАУ

Рассмотрим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Такие СЛАУ называются **квадратными**, поскольку в их матричной форме записи $A \cdot X = B$ матрица A получается квадратной.

Определение

Если $\det A \neq 0$, то квадратная СЛАУ называется **невырожденной**.

Теорема (о существовании решения квадратной СЛАУ)

Квадратная СЛАУ имеет решение и притом единственное, если она является невырожденной.

3.1 Матричный метод

Пусть $\det A \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1} , получим:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Отыскание решения невырожденной СЛАУ по данной формуле называется **матричным методом решения**.

3.2 Метод Крамера

Распишем полученную ранее формулу для X поэлементно:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot A^* \cdot B = \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

По теореме разложения определителя k -ый элемент получившегося вектора есть разложение по k -ому столбцу определителя, полученного из определителя матрицы A заменой k -ого столбца столбцом свободных членов B . Отсюда получаем формулы для вычисления решения:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots$$

Данные формулы называются **формулами Крамера**, а метод решения невырожденных СЛАУ по этим формулам – **методом Крамера**.

4 Метод Гаусса для решения произвольных СЛАУ

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.

Последовательно, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, находят все неизвестные.

Пример: Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Выписываем матрицы A и B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

и начинаем решение:

Прямой ход

1. С помощью элементарных преобразований строк приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array} \right) \stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array} \right) \stackrel{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

Сделаны следующие преобразования:

- (1) из второй строки вычли первую, умноженную на 2,
- (2) вторую строку разделили на 3.

2. Находим ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы \tilde{A} по эквивалентным им ступенчатым матрицам, причем ступенчатая матрица для A получается путем удаления из ступенчатой матрицы для \tilde{A} последнего столбца.

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array} \right) \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли (см. раздел 2 лекции) система совместна.

Поскольку количество неизвестных $n = 3$ больше ранга матрицы $r(A) = 2$, то система является неопределенной, т.е. имеет бесконечно много решений (см. утверждение 2 из раздела 2 лекции).

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A . Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2^{(6)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Если бы этот определитель оказался равен нулю, то нам было бы необходимо выбрать другие столбцы.

4. Определяем базисные неизвестные. Поскольку мы включили в базисный минор первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут x_1 и x_2 . Оставшаяся неизвестная x_3 будет свободной.

5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

6. Положим, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где c - произвольная постоянная, и перенесем в системе уравнений слагаемые, содержащие свободную неизвестную, в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - c, \\ x_2 = -8 - c. \end{cases}$$

Введение произвольной постоянной c обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых берутся базисные неизвестные x_1 и x_2 . Свободная неизвестная x_3 может принимать любые значения, однозначно ее найти нельзя.

Обратный ход

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$\begin{aligned} x_2 &= -8 - c, \\ x_1 &= 10 - c + 2x_2 = -6 - 3c. \end{aligned}$$

8. Выписываем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы, т.е. содержит в себе все частные решения, которые получаются путем придания произвольной постоянной c конкретных значений. Например, положив $c = 0$, получим конкретное частное решение

$$\begin{cases} x_1 = -6, \\ x_2 = -8, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$