Аналитическая геометрия
Модуль 1
Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.1
(для ГУИМЦ, 2024)

Аннотация

Виды матриц. Линейные операции над матрицами (сложение матриц и умножение матрицы на число) и их свойства. Нелинейные операции над матрицами (умножение матриц и транспонирование матрицы) и их свойства. Элементарные преобразования матриц.

1 Матрицы

Определение

Числовой матрицей размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, в которой имеется m строк и n столбцов. Составляющие матрицу числа называются ее **элементами**.

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, ... и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j. Иногда в обозначении матрицы указывается ее размерность: $A_{m \times n}$, где m - число строк, а n - число столбцов. Часто используется сокращенная запись матрицы: $A = (a_{ij})$.

Пример:

$$A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет размер 2×4, т.к. она содержит 2 строчки и 4 столбца, ее элемент $a_{23} = 7$ расположен во второй строке и третьем столбце.

2 Виды матриц

Определение

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**, в противном случае - **прямоугольной**.

Определение

Квадратная матрица размера $n\times n$ называется **матрицей n-ого порядка**.

Определение

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$ - **побочную**.

Пример:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Здесь элементы главной диагонали выделены красным цветом, а элементы побочной - синим.

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Определение

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

Обозначение: E.

Определение

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.

Пример:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определение

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

Обозначение: O.

Определение

Матрица, состоящая только из одного столбца или одной строки, называется **вектором** (**вектор-столбцом** или **вектор-строкой**).

3 Линейные операции над матрицами

К линейным операциям относятся:

1) сложение матриц,

2) умножение матрицы на число.

Определение

Две матрицы A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A = B$.

Определение

Суммой двух матриц одинакового размера A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Обозначение: $C = A + B$.

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определение

Произведением матрицы A **на число** α называется матрица B, каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы A на число α.

Обозначение: $B = \alpha \cdot A$ или $B = \alpha A$.

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$B = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Свойства линейных операций:

1) коммутативный закон сложения матриц
$$A + B = B + A;$$
2) ассоциативный закон сложения матриц
$$(A + B) + C = A + (B + C);$$
3) ассоциативный закон умножения матрицы на число относительно умножения чисел
$$\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A = \beta\,(\alpha A);$$
4) дистрибутивный закон умножения матрицы на число относительно сложения матриц
$$\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$
5) дистрибутивный закон умножения матрицы на число относительно сложения чисел
$$(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A.$$

Следствия из свойств линейных операций:

1. Матрица $-A$, называемая **противоположной** матрице A, определяется как
$$-A = (-1) \cdot A.$$
2. Матрица $A - B$, называемая **разностью** матриц A и B, определяется как
$$A - B = A + (-B).$$

4 Нелинейные операции над матрицами

К нелинейным операциям относятся:

1) умножение матриц,

2) транспонирование матрицы.

Определение

Произведением двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Обозначение: $C = A \cdot B$ или $C = AB$.

Замечание

Операция умножения матриц определена, только если число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (смотрите размерности матриц в определении). Такие матрицы называют **согласованными**.

Пример: Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют), когда

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы $A_{2\times 2}$ совпадает с числом строк матрицы $B_{2\times 3}$. Значит, матрица $A \cdot B$ существует и имеет размерность 2×3.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1+1\cdot 3 & 3\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 1+1\cdot 0 \\ 4\cdot 1+2\cdot 3 & 4\cdot 2+2\cdot 1 & 4\cdot 1+2\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы $B_{2\times 3}$ отличается от числа строк матрицы $A_{2\times 2}$. Поэтому матрица $B \cdot A$ не существует.

Свойства операции умножения:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$, $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
3) $(\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B) = A \cdot (\alpha B)$;
4) в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$;
5) $A \cdot E = A$, $E \cdot A = A$, где E - единичная матрица.

Следствие из свойств операции умножения:

Матрица A^n, называемая **n-ой степенью** квадратной матрицы A, определяется как

$$A^n = A \cdot A \cdot ... \cdot A \ (n \text{ раз}).$$

При этом полагают, что $A^0 = E$.

Определение

Матрица, полученная из матрицы A путем замены ее строк на столбцы с соответствующими номерами, называется **транспонированной** к A.

Обозначение: A^T.

Определение

Операция получения транспонированной матрицы называется **транспонированием матрицы**.

Пример: Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Свойства операции транспонирования:

1) $\left(A^T\right)^T = A$;
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
4) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Определение

Квадратная матрица A называется **симметрической (или симметричной)**, если она не изменяется в результате транспонирования, т.е. $A^T = A$.

5 Элементарные преобразования матриц

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

1) перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;

2) умножение и деление всех элементов ряда на число, отличное от нуля;

3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на число, отличное от нуля;

4) вычитание из элементов ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на число, отличное от нуля.

Определение

Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: $A \sim B$.