Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН

дисциплины «Линейная алгебра»
для студентов 1 и 2 курсов 2 семестра 2023-24 учебного года
УЦ1-21, УЦ1-22, ИУ5Ц-41Б

ЛИТЕРАТУРА

Основная учебная литература (ОЛ)

ОЛ - 1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 336 с. (Сер. Математика в техническом университете, вып. IV).
ОЛ - 2. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1993. – 480 с.

Дополнительная учебная литература (ДЛ)

ДЛ - 1. Попов В.С. Линейная алгебра: учеб. пособие. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 251 с.
ДЛ - 2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб. для вузов. – М.: Физматлит, 2005. – 280 с. (Сер. Классический университетский учебник)
ДЛ - 3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2004, 496 с.

Методические пособия, изданные в МГТУ (МП)

1. Крищенко А.П. Линейные пространства. Линейные операторы: Учеб. пособие. – М.: МГТУ им. Баумана, 1988. – 49 с.
2. Павельева Е.Б., Томашпольский В.Я. Линейная алгебра. Методические указания к выполнению типового расчета (ЭУИ). – М.: МГТУ им. Баумана, 2010.
3. Ильичев А.Т., Крапоткин В.Г., Савин А.С. Линейные операторы. Методические указания к выполнению типового расчета. – М.: МГТУ им. Баумана, 2003. – 36 с.
4. Пугачев О.В., Стась Г.П, Чередниченко А.В. Квадратичные формы и их геометрические приложения. Методические указания к выполнению типового расчета. – М.: МГТУ им. Баумана, 2004. – 59 с.
5. Меньшова И.В., Семакин А.Н. Матричная и векторная алгебра: Учебно-методическое пособие. – М.: МГТУ им. Баумана, 2023. – 88 с.

ЛЕКЦИИ

МОДУЛЬ 1: ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Лекция 1.1. Аксиомы и примеры линейных пространств. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Критерий линейной зависимости, его следствия. Определение базиса и размерности линейного пространства. Теорема о единственности разложения по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в базисе. Матрица перехода к новому базису. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

Лекция 1.2. Подпространства линейного пространства. Ранг системы векторов, связь с рангом матрицы. Линейная оболочка. Примеры. Евклидово пространство, аксиомы и примеры. Норма вектора. Неравенство Коши – Буняковского и неравенство треугольника. Ортогональность векторов. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов.

Лекция 1.3. Ортонормированный базис евклидова пространства. Вычисление скалярного произведения и нормы вектора в ортонормированном базисе. Теорема о существовании ортонормированного базиса и процесс ортогонализации Грама - Шмидта (без док-ва). Линейные операторы и их матрицы (определение, примеры). Действия над линейными операторами и соответствующие действия с их матрицами. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису, инвариантность ее определителя. Подобные матрицы.
Лекция 1.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора, его независимость от базиса. След матрицы линейного оператора и его инвариантность. Характеристический многочлен и собственные значения матрицы. Свойство множества собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Существование базиса из собственных векторов в случае действительных и некратных корней характеристического уравнения. Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов.

МОДУЛЬ 2: ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Лекция 2.1. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный и самосопряженный операторы, их матрицы в ортонормированном базисе. Свойства корней характеристического многочлена самосопряженного оператора: вещественность и равенство алгебраических и геометрических кратностей (без док-ва). Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих различным собственным значениям. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора (док-во для случая различных собственных значений). Ортогональные преобразования, ортогональные матрицы и их свойства. Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием.
Лекция 2.2. Квадратичные формы. Координатная и матричная формы записи. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису. Ранг квадратичной формы, его независимость от выбора базиса. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра (без док-ва). Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа.
Лекция 2.3. Закон инерции квадратичных форм (без док-ва). Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.
Лекция 2.4. Резерв.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

МОДУЛЬ 1: ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Занятие 1. Основные понятия теории матриц и векторов (линейные операции, линейная зависимость, ранг, базис и т.д.)
Ауд.: см. Приложение 1.
Дома: см. Приложение 1.
Занятие 2. Линейное пространство. Линейная зависимость. Базис и размерность пространства.
Ауд.: см. Приложение 2.
Дома: ОЛ-2, 4.2–4.10 (четн.), 4.19, 4.21, 4.25.
Занятие 3. Линейное пространство. Переход к новому базису.
Ауд.: см. Приложение 3.
Дома: ОЛ-2, 4.16, 4.18, 4.20, 4.31, 4.27, 4.28.

Занятие 4. Подпространство линейного пространства. Ранг системы векторов. Линейная оболочка системы векторов.
Ауд.: см. Приложение 4.
Дома: ОЛ-2, 4.45, 4.46, 4.49, 4.51, 4.52.
Занятие 5. Евклидовы пространства.
Ауд.: ОЛ-2, 4.63(а), 4.64(а), 4.65(а); ДЛ-3, 25.2(1,3), 25.7, 25.20(1,2), 25.22, 25.26(1,2).
Дома: ОЛ-2, 4.63(б), ДЛ-3, 25.2(2,4), 25.15, 25.20(3), 25.22.
Занятие 6. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта.
Ауд.: I. ОЛ-2, 4.67, 4.69, 4.73, 4.75.
II. Методом ортогонализации построить ортонормированный базис евклидова пространства R^3 со скалярным произведением $(\vec{x},\ \vec{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$ по его базису $\overrightarrow{a_1} = (1; -2; 3)$, $\overrightarrow{a_2} = (-1; 1; 0), \overrightarrow{a_3} = (-1; 1; 1)$.
Дома: ОЛ-2, 4.68, 4.72, 4.74, 4.76.
Занятие 7. Линейные операторы и их матрицы.
Ауд.: ОЛ-2, 4.83, 4.89, 4.91, 4.93.
Дома: ОЛ-2, 4.84, 4.86, 4.90, 4.92, 4.94, 4.96.
Занятие 8. Действия над линейными операторами. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
Ауд.: I. ОЛ-2, 4.97, 4.106(б), 4.107.
II. В линейном пространстве L_2 линейный оператор А в базисе $\vec{f} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$:

$$\vec{f_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{f_2} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

имеет матрицу $A_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Линейный оператор В в базисе $\vec{g} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$:

$$\vec{g}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,\ \vec{g}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$$

имеет матрицу $B_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу линейного оператора А + В в базисе $\{\vec{g}\ \}$.
Дома: ОЛ-2, 4.98, 4.107, 4.108.
Занятие 9. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
Ауд.: I. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. ОЛ-2, 4.135, 4.137.
Дома: ОЛ-2, 4.134-4.142 (чет.)
Занятие 10. Рубежный контроль по модулю 1.

МОДУЛЬ 2: ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Занятие 11. Диагонализация симметрических матриц ортогональным преобразованием.
Ауд.: ОЛ-2, 4.174, 4.183, 4.191.
Дома: ОЛ-2, 4.175, 4.176, 4.184, 4.186.
Занятие 12. Квадратичные формы, критерий Сильвестра. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.
Ауд.: см. Приложение 5.
Дома: см. Приложение 5.
Занятия 13. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
Ауд.: ОЛ-2, 4.210, 4.211.
Дома: ОЛ-2, 4.212.
Занятия 14. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогонального преобразования.
Ауд.: ОЛ-2, 4.213, 4.215.
Дома: ОЛ-2, 4.214, 4.216.

Занятие 15. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.
Ауд.: I. ОЛ-2, 4.226, 4.228.
II. Построить кривую второго порядка $5x^2 - 5y^2 - 24xy = 52$, приведя её к каноническому виду ортогональным преобразованием.
Дома: ОЛ-2, 4.227, 4.229, 4.231.
Занятие 16. Рубежный контроль по модулю 2.

Контрольные мероприятия:

Модуль 1

Рубежный контроль 1. Срок сдачи — 10 неделя
Домашнее задание 1. Срок сдачи — 10 неделя

Модуль 2

Рубежный контроль 2. Срок сдачи — 15 неделя
Домашнее задание 2. Срок сдачи — 15 неделя

Приложение 1

Практическое занятие №1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАТРИЦ И ВЕКТОРОВ (ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ, ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ, РАНГ, БАЗИС И Т.Д.)

1. Найти линейные комбинации матриц:

а) $4A-7B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5 & 3\\ 2 & 0 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 7 & -5\\ -8 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

б) $A-\lambda E$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

в) $A-\lambda E$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 0 & 6\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $4A-7B=\begin{pmatrix}4 & -22 & -29 & 47\\ 64 & -7 & -33 & 4\\ -8 & -18 & 14 & -19\end{pmatrix}$; б) $A-\lambda E=\begin{pmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & -2-\lambda\end{pmatrix}$;

с) $A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1-\lambda & 2 & 4\\ 5 & -\lambda & 6\\ 3 & -2 & 4-\lambda\end{pmatrix}$.

2. Найти значение матричного многочлена $f(x)=3x^2+2x+5$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Ответ: $f(A)=\begin{pmatrix}21 & -60\\ 0 & 61\end{pmatrix}$.

3. Найти ранг матрицы метод элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -14 & 22\\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9\\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17\end{pmatrix}.$$

Ответ: r = 2.

4. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0.\end{cases}$$

Ответ: $X = c_1 \cdot F_1 + c_2 \cdot F_2 = (8c_1 - 7c_2;\ -6c_1 + 5c_2;\ c_1;\ c_2)$, $F_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Заданы векторы: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j};\ \vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k};\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Найти:

а) координаты орта $\vec{a}^0$;

б) координаты вектора $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

в) разложение вектора $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;

г) $\text{пр}_{\vec{j}}(\vec{a} - \vec{b})$.

Ответ: а) $\vec{a}^0 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}};\ \frac{3}{\sqrt{13}};\ 0\right)$, б) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = \left(3;\ \frac{11}{2};\ 0\right)$, в) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = -2\vec{j}$,

г) $\text{пр}_{\vec{j}}(\vec{a} - \vec{b}) = 6$.

6. Представить вектор $\vec{d} = (4;\ 12;\ -3)$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a} = (2;\ 3;\ 1)$, $\vec{b} = (5;\ 7;\ 0)$, $\vec{c} = (3;\ -2;\ 4)$.

Ответ: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

7. Даны векторы $\vec{a} = (2;\ 3)$, $\vec{b} = (1;\ -3)$, $\vec{c} = (-1;\ 3)$. При каком значении коэффициента α векторы $\vec{p} = \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{c}$ коллинеарны?

Ответ: $\alpha = -2$.

Дома:

1. Найти линейные комбинации матриц:

а) $5A - 3B + 2C$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

б) $A - \lambda E$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) $\begin{pmatrix} -20 & -7 & 8 \\ 28 & 19 & -6 \\ -5 & 18 & 27 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 & 5 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{pmatrix}$.

2. Найти значение матричного многочлена $f(x) = x^2 - 3x + 2$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $r = 2$ при $\lambda = 3$; $r = 3$ при $\lambda \neq 3$.

4. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответ: общее решение системы: $X = \begin{pmatrix} -\frac{19}{8}c_1 - \frac{3}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{7}{8}c_1 + \frac{25}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, фундаментальная система решений: $F_1 = \begin{pmatrix} -\frac{19}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Разложить вектор $\vec{a} = (6;\ 12;\ -3)$ по векторам $\vec{p} = (0;\ 2;\ 1)$, $\vec{q} = (1;\ 1;\ -1)$, $\vec{r} = (5;\ 3;\ 0)$.

Ответ: $\vec{a} = 3\vec{p} + 6\vec{q} + 0\vec{r}$.

Приложение 2

Практическое занятие № 2

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА.

1. Показать, что множество $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$ квадратных матриц второго порядка, элементами которых являются действительные числа, образует линейное пространство, если за операции взять сложение матриц и умножение матрицы на число.

2. Проверить, образует ли линейное пространство множество многочленов степени n от одного неизвестного с действительными коэффициентами, если за операции взять обычные сложение многочленов и умножение многочлена на число.

Ответ: нет.

3. Показать, что множество всевозможных упорядоченных пар действительных чисел с элементами $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, в котором операция сложения элементов определена по правилу $X + Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$, а операция умножения элемента из R^2 на любое число $\lambda \in R$ – по правилу $\lambda \cdot X = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, не образует линейное пространство.

4. Пусть в пространстве R^3 заданы векторы $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Доказать, что заданная система векторов линейно зависимая. Найти зависимость между векторами.

Ответ: $-7\vec{a}_1 + 9\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 0$.

5. Показать, что система векторов $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ образует базис линейного пространства R^3 и найти в этом базисе координаты вектора $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\vec{b} = (1;\ 2;\ 3) = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$.

6. Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

а) Найти базис и размерность линейного пространства, в котором заданы векторы.

б) Определить, сколько базисов можно построить из данных векторов?

Ответ: а) в качестве базиса можно взять, например, векторы $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$; $\dim = 2$. б) 12.

7. Исследовать в пространстве $P_2(x)$ линейную зависимость многочленов: $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = x^2 - 1$, $p_3(x) = x^2 + x + 1$.

Ответ: многочлены $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $p_3(x)$ линейно независимы.

Практическое занятие №3

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ПЕРЕХОД К НОВОМУ БАЗИСУ

1. Найти матрицу перехода к базису $B^*=\{\vec{e}_1^*,\vec{e}_2^*\}$ (новый базис), векторы которого $\vec{e}_1^*=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ и $\vec{e}_2^*=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ заданы координатами в некотором базисе $B=\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ (старый базис).

Ответ: $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

2. Пусть вектор $\vec{x}$ в базисе $B=\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ имеет координаты $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $B^*=\{\vec{e}_1^*,\ \vec{e}_2^*,\ \vec{e}_3^*\}$, где $\vec{e}_1^*=\vec{e}_1+2\vec{e}_3$, $\vec{e}_2^*=\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\vec{e}_3^*=-\vec{e}_1-\vec{e}_2-2\vec{e}_3$.

Ответ: $\vec{x}=(0;\ 1;\ -1)$.

3. В линейном пространстве R^3 заданы два базиса: $A=\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$, $B=\{\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3\}$: $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$; $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ – и вектор $\vec{x}=5\vec{a}_1+3\vec{a}_2+\vec{a}_3$.

Найти:

а) матрицу перехода *T* от базиса *A* к базису *B;*

б) матрицу обратного перехода T^{-1}*;*

в) координаты вектора $\vec{a}_1$ в базисах *A* и *B;*

г) координаты вектора $\vec{x}$ в базисе *B*.

Ответ: а) $T=\begin{pmatrix}2 & -1{,}5 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0{,}5 & 1\end{pmatrix}$; б) $T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

в) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_A$, $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}_B$; г) $\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\22\\10\end{pmatrix}_B$.

4. В линейном пространстве R^3 заданы векторы: $\vec{e}_1^*=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{e}_2^*=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{e}_3^*=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

Доказать, что система $B^*=\{\vec{e}_1^*,\ \vec{e}_2^*,\ \vec{e}_3^*\}$ – базис в R^3 и написать матрицу перехода $T_{B\to B^*}$, где $B=\{\vec{e}_1=\vec{i},\ \vec{e}_2=\vec{j},\ \vec{e}_3=\vec{k}\}$. Найти координаты вектора $\vec{x}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ в базисе B'.

Ответ: $T_{B\to B^*}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}5\\ -1{,}5\\ -2\end{pmatrix}_{B^*}$.

Приложение 4

Практическое занятие №4

ПОДПРОСТРАНСТВО ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ. ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

1. Является ли линейным подпространством в пространстве $\mathrm{Matr}_n(R)$ матриц порядка n подмножество, образованное всеми:
а) матрицами с нулевой первой строкой;
б) нижнетреугольными матрицами;
в) невырожденными матрицами?
Ответ: а) является; б) является; в) не является.

2. В линейном пространстве $P_n(t)$ многочленов степени не выше n заданы подмножества, состоящие из многочленов $f(t)$, для которых:
а) $f(1)=0$;
б) $f(1)=1$.
Является ли каждое из этих подмножеств линейным подпространством в $P_n(t)$?
Ответ: а) является; б) не является.

3. Найти размерность и какой-либо базис линейной оболочки системы векторов:
$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{a}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\ \vec{a}_5=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}.$$
Ответ: dim = 3, базис – $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_4\}$.

4. Найти размерность и базис пространства решений однородной системы линейных уравнений:
$$\text{а) }\begin{cases}3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=0;\\6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=0;\\9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=0.\end{cases}\quad \text{б) }\begin{cases}4x_1-2x_2+3x_3-x_4=0,\\2x_1+x_2-4x_4=0,\\x_1+x_3-2x_4=0.\end{cases}$$
Ответ: а) dim = 2, базис – $F_1=(2;3;0;0)$ и $F_2=(0;1;10;-12)$;
б) dim = 1, базис – $F=(3;14;7;5)$.

5. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов $\vec{a}_1=(1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1)$, $\vec{a}_2=(1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 3)$, $\vec{a}_3=(3;\ 1;\ 1;\ -1;\ 7)$, $\vec{a}_4=(0;\ 2;\ -1;\ 1;\ 2)$.
Ответ: $\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=0,\\x_1-x_2+2x_4=0,\\2x_1+x_2+x_5=0.\end{cases}$

Практическое занятие №12

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. КРИТЕРИЙ СИЛЬВЕСТРА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ПРИ ПЕРЕХОДЕ К НОВОМУ БАЗИСУ

1. Записать квадратичную форму в матричном виде:

а) $f(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_1x_2-4x_2^2$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+4x_3^2+6x_1x_2-8x_2x_3$.

2. Зная матрицу квадратичной формы, записать квадратичную форму в виде многочлена:

а) $A=\begin{pmatrix}1&5&0\\5&-2&1\\0&1&4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

3. Перейти от матричной записи квадратичной формы к записи в виде многочлена:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\quad x_2\quad x_3)\cdot\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&3\\-2&-4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

4. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы:

а) $f(x_1,x_2)=x_1^2+26x_2^2+10x_1x_2$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=-11x_1^2-6x_2^2-6x_3^2+12x_1x_2-12x_1x_3+6x_2x_3$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-15x_2^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$;

г) $f(x_1,x_2)=2\lambda x_1^2+(2\lambda+8)x_1x_2+(\lambda+1)x_2^2$.

5. Найти квадратичную форму, полученную из $f(x_1,x_2)=x_1^2+5x_2^2-4x_1x_2$ невырожденным преобразованием переменных: $\begin{cases}x_1=2y_1-3y_2;\\x_2=y_1+y_2.\end{cases}$

6. Написать квадратичную форму $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2$ в новом базисе:

$$\vec{f}_1=(1;\ 3),\ \vec{f}_2=(-1;\ 2).$$

7. Записать квадратичную форму $f(X)=4xy-y^2+2xz-6yz$ в новом базисе:

$$\vec{f}_1=(1;2;0), \vec{f}_2=(1;0;1), \vec{f}_3=(0;1;3).$$

Дома:

А. Найти матрицу квадратичной формы:

1. $f(x,y)=2x^2+6xy-y^2$; 2. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_3+3x_2^2-4x_2x_3-x_3^2$;

3. $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+3x_2^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$;

4. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+4x_1x_2-6x_1x_3-x_2^2+8x_2x_4+2x_3x_4+3x_4^2$.

Б. Восстановить квадратичную форму по ее матрице:

5. $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&3\end{pmatrix}$; 6. $A=\begin{pmatrix}0&3\\3&-2\end{pmatrix}$;

7. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 8. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

В. Исследовать знакоопределенность квадратичной формы в зависимости от значения параметра α:

9. $f(x,y)=x^2+6xy-y^2$; 10. $f(x,y,z)=x^2+5y^2+8z^2+2xy-2xz+6yz$;

11. $f(x,y)=\alpha x^2+8xy+(\alpha+6)y^2$ (в зависимости от значения параметра α).

Г. Найти квадратичную форму в новом базисе:

12. $f(x,y)=x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2,\quad \boldsymbol{e}_1'=(1;\ 3),\quad \boldsymbol{e}_2'=(-1;\ 2)$;

13. $f(x,y,z)=x^2+2xy+4yz-z^2,\quad \boldsymbol{e}_1'=(1;\ -1;\ 0), \boldsymbol{e}_2'=(0;\ 1;\ 2), \boldsymbol{e}_3'=(1;\ 0;\ 3)$;

14. $f(x,y,z)=4xy-y^2+2xz-6yz,\quad \boldsymbol{e}_1'=(1;\ 2;\ 0), \boldsymbol{e}_2'=(1;\ 0;\ 1), \boldsymbol{e}_3'=(0;\ 1;\ 3)$;

Ответы домашнего задания:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $-x^2+2xy+3y^2$. 6. $6xy-2y^2$. 7. $2x^2+3y^2-2z^2-2xy+2yz$.

8. $x^2+4z^2-2xy+6xz-2yz$.

9. Неопределена. 10. Положительно определена

11. При $\alpha>2$ определена положительно; при $\alpha<-8$ определена отрицательно; $-8\le\alpha\le2$ неопределена.

12. $31y_1^2+18y_1y_2+y_2^2$.

13. $-x'^2+4y'^2-8z'^2-6x'y'-12x'z'+2y'z'$.

14. $4x'^2+2y'^2-19z'^2-2x'y'-30x'z'+4y'z'$.