Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МОДУЛЬ 1: ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Индивидуальное домашнее задание

Общие методические указания:

- Домашнее задание выполняется по вариантам, номер которого соответствует номеру в списке журнала посещаемости занятий.

- Работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней стороне обложки которой должны быть указаны: фамилия и инициалы студента, выполнившего домашнее задание, шифр группы, наименование дисциплины и название домашнего задания.

- Решения задачи начинается с приведения полного текста задания.

- Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Необходимо привести все вычисления, проделанные по ходу выполнения заданий, ответ.

- Работа над ошибками выполняется в конце работы. Исправления в тексте после проверки работы преподавателем не допускаются.

Критерии оценки: Домашнее задание считается сданным, если правильно решены все задачи. Число баллов, проставляемое за домашнее задание, зависит от количества ошибок, допущенных студентом в ходе выполнения работы, и числа попыток сдачи работы преподавателю до устранения всех ошибок. Итоговое число баллов домашних заданий выбирается из диапазона 11-15.

Составитель: кандидат ф.-м.н.,
доцент кафедры «Высшей математики»
МГТУ им. Н.Э. Баумана
И.В. Меньшова

Задача 1.1. Векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ заданы своими координатами в каноническом базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ линейного пространства $\boldsymbol{V_3}$. Показать, что векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ образуют базис пространства $\boldsymbol{V_3}$. Найти разложение вектора $\vec{d}$ по этому базису. Сделать проверку. (**2 балла**)

№ варианта	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	(1; 2; 3)	(–2; 0; 1)	(–3; 2; 0)	(–2; 0; 6)
2	(3; –2; 4)	(0; –3; 5)	(7; 1; 0)	(1; –1; 2)
3	(2; 1; 3)	(1; 0; –2)	(–3; 2; 0)	(7; 0; 6)
4	(4; –5; 7)	(1; 0; –2)	(2; –1; 0)	(–5; 1; 1)
5	(–3; 1; 0)	(4; 3; –1)	(1; 1; 0)	(–9; 4; 1)
6	(2; 1; –1)	(1; 0; –2)	(–1; 2; 3)	(9; –7; –19)
7	(2; 1; 3)	(1; 0; –2)	(–1; 0; 3)	(2; 1; 4)
8	(–3; 1; 0)	(4; 3; –1)	(1; 1; 0)	(–5; 4; 1)
9	(2; 1; –1)	(1; 0; –2)	(–1; –2; 3)	(0; 3; –1)
10	(6; 0; –2)	(1; 1; –1)	(0; –3; 4)	(5; –7; 11)
11	(–1; 1; –2)	(2; 0; 3)	(4; 1; 2)	(11; 1; 9)
12	(0; 2; –3)	(4; 1; 2)	(–1; 5; –2)	(–3; 2; 1)
13	(4; –2; 6)	(1; –1; 2)	(1; 5; 7)	(5; –1; 6)
14	(8; 1; 0)	(–3; 0; 4)	(1; 2; 3)	(–3; 3; 2)
15	(–2; 1; 1)	(1; 0; 1)	(0; 2; 1)	(3; –2; 2)

Задача 1.2. Является ли множество $L=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\}$ векторов заданного вида линейным подпространством в $\boldsymbol{R^3}$? Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства $\boldsymbol{R^3}$. Выписать матрицу перехода от канонического базиса пространства $\boldsymbol{R^3}$ к построенному базису. (**2 балла**)

№ варианта	$L=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\};\ a,\ b\in\mathbb{R}$	
1	а) $(a+b;\ -a+2b;\ a-3b)$,	б) $(a+b;\ -a+2b;\ a-3)$.
2	а) $(3a+b;\ 3+2b;\ a-2b)$,	б) $(3a+b;\ 3a+2b;\ a-2b)$.
3	а) $(2a-2;\ -3a+2b;\ 2a+b)$,	б) $(2a-2b;\ -3a+2b;\ 2a+b)$.
4	а) $(2a+b;\ a;\ -a+3b)$,	б) $(2a+b;\ a;\ -1+3b)$.
5	а) $(-3-2b;-a+2b;-a+3b)$,	б) $(-3a-2b;-a+2b;-a+3b)$.
6	а) $(a+b;\ -7b;\ -2a+3b)$,	б) $(a+b;\ -7b;\ -2a+3)$.
7	а) $(3a+2b;\ -a-b;\ 2a+4b)$,	б) $(3a+2b;\ -a-b;\ 2a+4)$.
8	а) $(-a-1;\ -3a+b;\ 2a-b)$,	б) $(-a-b;\ -3a+b;\ 2a-b)$.

9	а) $(2a;\ 3b-1;\ -b)$,	б) $(2a;\ 3b-a;\ -b)$.
10	а) $(-2a-b;\ 2a;\ a-3b)$,	б) $(-2a-b;\ 2a+1;\ a-3b)$.
11	а) $(1+b;\ a-2b;\ 2a-b)$,	б) $(2a+b;\ a-2b;\ a-3b)$.
12	а) $(3a-b;\ a-2b;\ a+3b)$,	б) $(a+2;\ a+4b;\ a+2b)$.
13	а) $(a-4b;\ -a+2;\ a+5b)$,	б) $(4a+b;\ -a+b;\ a+5b)$.
14	а) $(a+3b;\ -a+b;\ a-3b)$,	б) $(4a+b;\ -a-2b;\ a-4)$.
15	а) $(1+b;\ -a+b;\ 2a-3b)$,	б) $(3a+b;\ 2a-2b;\ a+b)$.

Задача 1.3. Проверить, что множество многочленов $L=\{p(t)\}$ заданного вида с вещественными коэффициентами образует линейное подпространство в линейном пространстве $\boldsymbol{P}_2$ многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис L, дополнить его до базиса всего пространства $\boldsymbol{P}_2$. Найти координаты многочлена $h(t)\in L$ в базисе подпространства L. (**2 балла**)

№ варианта	$p(t);\ a,\ b\in\mathbb{R}$	$h(t)$
1	$p(t)=(-a+3b)t^2+(2a+b)t+7a$	$h(t)=-3t^2+20t+63$
2	$p(t)=-at^2+(2a+b)t-4a$	$h(t)=-t^2-4$
3	$p(t)=(2a+4b)t^2+(-a-2b)t-4a$	$h(t)=10t^2-5t-3$
4	$p(t)=(2a-b)t^2+bt+a-3b$	$h(t)=t^2+t-2$
5	$p(t)=at^2+(a-2b)t+4a+4b$	$h(t)=-2t^2-4t-4$
6	$p(t)=3at^2+(2a+b)t+3a+b$	$h(t)=-3t^2+t$
7	$p(t)=(a-2b)t^2+(-a+3b)t+2a$	$h(t)=-5t^2+6t-6$
8	$p(t)=(a-2b)t^2+3at+4a+4b$	$h(t)=t^2-3t-8$
9	$p(t)=(-a+b)t^2+(3a-3b)t+2b$	$h(t)=-t^2+3t+2$
10	$p(t)=2at^2+(a+4b)t-a+4b$	$h(t)=-6t^2+5t+11$
11	$p(t)=(2a+b)t^2+(a-3b)t+2a$	$h(t)=-t-7$
12	$p(t)=(a-b)t^2+2at-a+3b$	$h(t)=15t^2+8t-15$
13	$p(t)=3at^2+(4a-b)t+a+5b$	$h(t)=-t^2-4t+5$
14	$p(t)=-at^2+(a-2b)t+4a-b$	$h(t)=-4t^2+4t+4$
15	$p(t)=(2a-b)t^2+(a-4b)t+a+b$	$h(t)=7t^2-11t-14$

Задача 1.4. Доказать, что множество $\boldsymbol{M}$ матриц заданного вида является линейным подпространством в линейном пространстве квадратных матриц

второго порядка $\boldsymbol{M}_{2x2}$. Построить базис, найти размерность подпространства M и дополнить его до базиса всего пространства $\boldsymbol{M}_{2x2}$. (**2 балла**)

№ варианта	$M;\ a,\ b \in \mathbb{R}$
1	$\begin{pmatrix} 4a-2b & 0 \\ -3a+3b & 2a \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -4a+3b & -a+3b \\ 0 & 2a-2b \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2a+3b & -4a+2b \\ a-4b & 2a \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -3a+2c & -3a-b \\ c & 2b-3c \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} a+2b & b+3c \\ 2c & 0 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} a-3b & a+b \\ b & -3a-2b \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 5b-c & -a \\ 2a+b+c & 3c \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -a-c & 2b+c \\ 2b-3c & b+2c \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -a+3b & -2a+3b \\ -3a-3b & -a+b \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -a-b & 2a-b \\ -3a-2b & -2a-3b \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2a-b & 4a+b \\ 3a & 2a+5b \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 2a+b & 3b+c \\ -3a+b & b+c \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -3a+2b & -2a+c \\ c & 2b-c \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 5b-c & -c \\ a+b & b+c \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 2a-b & a+2b \\ 4a-2b & 3a+b \end{pmatrix}$

Задача 1.5. Методом ортогонализации построить ортонормированный базис евклидова пространства по его базису $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$. (**3 балла**)

№ варианта	$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$
1	(1; 1; 2)	(2; –1; 0)	(–1; 1; 1)
2	(1; 1; 3)	(–3; –1; 0)	(–1; 0; 1)
3	(1; 1; 4)	(4; –1; 0)	(1; –1; 1)
4	(1; –1; 3)	(3; –1; 0)	(–1,1,1)
5	(1; 1; 4)	(4; 0; –1)	(1; 1; –1)
6	(1; –5; 1)	(5; –1; 0)	(1; 1; –1)
7	(1; 2; 4)	(1;–1; 0)	(1; 1; 1)
8	(1; 1; 3)	(2; 1; 3)	(0; 2; –1)
9	(–1; 2; 5)	(6; –1; 1)	(–1; 1; 0)
10	(1; 1; 6)	(4; –1; 0)	(–1; 2; 1)
11	(–1; 1; 1)	(1; –1; 2)	(1; 2; 1)
12	(1; –1; 2)	(1; –1; 2)	(1; 1; 1)
13	(2; 1; –2)	(1; 2; 1)	(1; 2; 3)
14	(0; 1; 2)	(3; –1; 0)	(1; 0; 1)
15	(1; 1; –2)	(–2; 1; 0)	(2; 1; 1)

Задача 1.6. Оператор A действует в пространстве $\boldsymbol{R^3}$, $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)\in R^3$. Проверить, является ли оператор A линейным. В случае линейности записать матрицу оператора A в каноническом базисе пространства $\boldsymbol{R^3}$. (**2 балла**)

№ варианта	A
1	а) $A\vec{x}=(x_1+x_2+x_3;\ x_1+x_2;\ x_1+2x_3)$; б) $A\vec{x}=(x_1+x_2+3;\ x_1+4x_2+x_3;\ -4x_1-x_3)$
2	а) $A\vec{x}=(-6x_2+x_3;\ x_1+x_2-1;\ 6x_2+x_3)$; б) $A\vec{x}=(x_1;\ x_1+x_2+x_3;\ x_1-x_2-x_3)$
3	а) $A\vec{x}=(x_1^2+2x_2+x_3;\ x_1;\ x_1+2x_2+3x_3)$; б) $A\vec{x}=(x_1-2x_2+x_3;\ x_1+2x_2+3x_3;\ x_1+3x_3)$
4	а) $A\vec{x}=(2x_1+3x_2+x_3;\ x_1+4x_2+x_3;\ 4x_1)$; б) $A\vec{x}=(x_1-3x_2;\ x_2-x_3;\ x_1+2)$
5	а) $A\vec{x}=(x_1-2x_2+4x_3;\ x_2+3x_3;\ -x_1+x_3)$; б) $A\vec{x}=(4x_1+x_2+3x_3;\ x_1-2x_2+x_3;\ 7x_1+7)$
6	а) $A\vec{x}=(2x_2+x_3;\ x_1-3;\ x_1+2x_2-4x_3)$; б) $A\vec{x}=(x_1+2x_2;\ x_1-3x_2+x_3;\ 3x_1+x_2-2x_3)$

7	а) $\mathrm{A}\vec{x} = (5x_1 + x_2 + x_3\ x_1;\ x_3)$; б) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 + x_2 - 3x_3;\ 7;\ x_1 + 2x_2)$
8	а) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_3;\ x_2 + x_3;\ x_3^3)$; б) $\mathrm{A}\vec{x} = (-x_1 + x_3;\ x_1 - x_2 + 3x_3;\ x_1 + 2x_2 + x_3)$
9	а) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 + 6x_2 + 3x_3;\ x_1 - x_2;\ x_1 + 7x_2 + 0{,}5x_3)$; б) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 5x_2 + 2x_3;\ x_1 + x_3;\ 9)$
10	а) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 + 4x_2 + x_3;\ 3x_1 + 2x_2 + x_3;\ x_1)$; б) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 + x_3;\ 3x_1 - 2x_2 + x_3;\ 1)$
11	а) $\mathrm{A}\vec{x} = (2x_1 + 6x_2 - x_3;\ 3x_2 - 3x_3;\ -x_1 + 7)$; б) $\mathrm{A}\vec{x} = (2x_1 + 6x_2 - x_3;\ 3x_2 - 3x_3;\ -x_3)$
12	а) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 + x_3;\ x_1 - x_3;\ x_2 + 4x_3)$; б) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 4x_2 + x_3;\ x_1 - x_3;\ x_2 + 4)$
13	а) $\mathrm{A}\vec{x} = (3x_1^2 - 4x_2 + 5x_3;\ 2x_1;\ 3x_2 - 5x_3)$; б) $\mathrm{A}\vec{x} = (3x_1 - 4x_2 + 5x_3;\ 2x_1;\ 3x_2 - 5x_3)$
14	а) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_3;\ 2x_2 + 4x_3;\ 3x_1 + 4)$; б) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 - 3x_3;\ 2x_2 + 4x_3;\ 3x_1 + 4x_2)$
15	а) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1^2 + 2x_2;\ x_1 - 4x_3;\ 2x_1 + x_2 - x_3)$; б) $\mathrm{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2;\ x_1 - 4x_3;\ 2x_1 + x_2 - x_3)$

Задача 1.7. Линейный оператор A в базисе $\{\vec{e}\} = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ задан матрицей A. Найти матрицу оператора A в базисе $\{\vec{a}\} = \{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$. **(2 балла)**

№ варианта	A	$\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$
1	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
2	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{a}_3 = -2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$
4	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$

5	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_3$
8	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = \vec{e}_2$
9	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$
10	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2,$ $\vec{a}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
14	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$
15	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,$ $\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3,$ $\vec{a}_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$