

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МОДУЛЬ 1: ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Вопросы по теории рубежного контроля

1. Дайте определение линейного пространства и сформулируйте его аксиомы. Приведите примеры линейных пространств.
2. Дайте определение линейно зависимой системы векторов. Сформулируйте критерий линейной зависимости и следствия из него.
3. Дайте определение базиса линейного пространства. Сформулируйте теорему о единственности разложения элемента линейного пространства по базису.
4. Дайте определение размерности линейного пространства. Чему равна размерность линейного пространства, состоящего из решений системы линейных однородных уравнений? Как связаны между собой понятия
а) базис линейного пространства решений и фундаментальная система решений;
б) размерность линейного пространства решений и ранг матрицы системы?
5. Дайте определение матрицы перехода от одного базиса линейного пространства к другому и сформулируйте ее свойства. Напишите формулу преобразования координат вектора при переходе к новому базису.
6. Дайте определение подпространства линейного пространства и сформулируйте его свойства. Приведите примеры линейных подпространств.
7. Дайте определение линейной оболочки и приведите ее свойства.
8. Дайте определения: евклидова пространства, скалярного произведения, ортогональных векторов. Приведите примеры.
9. Приведите неравенство Коши–Буняковского и запишите следствия из него: неравенство Коши, неравенство Шварца.
10. Дайте определение нормы вектора и нормированного пространства. Приведите примеры. Запишите формулу определения косинуса угла между векторами в евклидовом пространстве.

11. Дайте определения ортогональной, ортонормированной систем векторов. Сформулируйте свойство ортогональной системы, связанное с линейной зависимостью, и следствие из него.
12. Дайте определение ортогонального и ортонормированного базисов, приведите примеры.
13. Подробно опишите построение ортонормированного базиса из произвольного базиса с помощью процесса ортогонализации Грама – Шмидта.
14. Дайте определение линейного оператора. Приведите примеры линейных и нелинейных операторов. Дайте определения невырожденного, нулевого и единичного линейных операторов.
15. Дайте определение матрицы линейного оператора в данном базисе и опишите с её помощью действие линейного оператора на произвольный вектор.
16. Дайте определения: суммы и произведения линейных операторов, произведение линейного оператора на число. Приведите их свойства.
17. Выведите формулу преобразования матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
18. Дайте определение подобных матриц и сформулируйте свойство их определителей.
19. Дайте определения: собственного вектора и собственного значения линейного оператора, характеристического уравнения. Запишите вид характеристического уравнения линейного оператора и сформулируйте свойство его независимости от выбора базиса (свойство инвариантности).
20. Сформулируйте свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора, правила (теоремы) нахождения: (а) собственных чисел; (б) собственных векторов.
21. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором матрицу линейного оператора можно привести к диагональному виду. Сформулируйте следствия из него (3 следствия).