Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Комплект задач для рубежного контроля №1

по дисциплине «Линейная алгебра»

Модуль 1: Линейные и евклидовы пространства.

Линейные операторы в линейном пространстве

Вариант 01 (образец)

1. Дайте определение линейного пространства и сформулируйте его аксиомы. Приведите примеры линейных пространств. **(4 балла)**

2. Дайте определение ортогонального и ортонормированного базисов, приведите примеры. **(2 балла)**

3. Доказать, что векторы $\vec{a}_1 = (2;\ 5;\ 1)$, $\vec{a}_2 = (-4;\ -2;\ -2)$, $\vec{a}_3 = (1;\ 0;\ -1)$ образуют базис в пространстве арифметических векторов $\mathbf{R}^3$. Найти координаты вектора $\vec{b} = (3;\ 13;\ 0)$ в этом базисе. **(6 баллов)**

4. Найти базис и размерность линейного пространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$ **(5 баллов)**

5. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке векторов $\vec{g}_1 = (-1;\ 1;\ 0;\ 1)$, $\vec{g}_2 = (0;\ 1;\ 1;\ 0)$, $\vec{g}_3 = (2;\ 0;\ 1;\ 1)$, предварительно убедившись, что указанная система векторов линейно независима. **(6 баллов)**

6. Линейный оператор A в базисе $\{\vec{e}\} = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ имеет матрицу $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\{\vec{a}\} = \{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$, если базисы связаны соотношением:

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \\ \vec{a}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{a}_3 = \vec{e}_2. \end{cases}$$ **(7 баллов)**

Критерии оценки: Решение каждой задачи оценивается по шкале от 0 до 7 баллов. Максимально возможное количество баллов для каждого задания указаны в скобках. Рубежный контроль считается сданным, если сумма баллов за все задачи (включая теорию) не меньше 18.

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Комплект задач для рубежного контроля №1

по дисциплине «Линейная алгебра»

Модуль 1: Линейные и евклидовы пространства.

Линейные операторы в линейном пространстве

Вариант 02 (образец)

1. Дайте определения: евклидова пространства, скалярного произведения, ортогональных векторов. Приведите примеры. **(3 балла)**

2. Дайте определение матрицы линейного оператора в данном базисе и опишите с её помощью действие линейного оператора на произвольный вектор. **(3 балла)**

3. Дана система арифметических векторов $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$ пространства $\mathbf{R}^3$: $\vec{a}_1 = (1;\ 0;\ 2)$, $\vec{a}_2 = (0;\ 1;\ 1)$, $\vec{a}_3 = (-1;\ -1;\ -2)$.

а) Доказать, что она является базисом в пространстве $\mathbf{R}^3$, записать матрицу T перехода от стандартного базиса $\mathbf{E} = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$: $\vec{e}_1 = (1;\ 0;\ 0)$, $\vec{e}_2 = (0;\ 1;\ 0)$, $\vec{e}_3 = (0;\ 0;\ 1)$ этого пространства к базису $\mathbf{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$.

б) Написать формулы преобразования координат при преобразовании базиса. Пользуясь полученными формулами, найти координаты вектора $\vec{b} = (1;\ 2;\ 3)$ в базисе $\mathbf{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$. **(6 баллов)**

4. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов: $\vec{a}_1 = (9;\ 7;\ -4;\ 0)$, $\vec{a}_2 = (1;\ 1;\ 0;\ -4)$. **(6 баллов)**

5. В базисе $\mathbf{B} = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$: $\vec{e}_1 = (1;\ 0;\ 0)$, $\vec{e}_2 = (0;\ 1;\ 0)$, $\vec{e}_3 = (0;\ 0;\ 1)$ − арифметических векторов пространства $\mathbf{R}^3$ – вектор $\vec{x}$ имеет координаты $\vec{x} = (x;\ y;\ z)$. Оператор A переводит вектор $\vec{x}$ в вектор $\mathrm{A}\vec{x} = (7x - 2z;\ -9x + 3y + 6z;\ -8x - 3y - 4z)$. Докажите линейность оператора A и найдите его матрицу в базисе $\mathbf{B}$. **(6 баллов)**

6. В базисе $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ евклидова пространства $\mathbf{R}^2$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\vec{a} = (-1;\ -2)$ и $\vec{b} = (1;\ -3)$. Найти $\|\vec{b}\|$ и $(\vec{a}, \vec{b})$, если $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = 2$, $\|\vec{a}\| = 4$. **(6 баллов)**

Критерии оценки: Решение каждой задачи оценивается по шкале от 0 до 7 баллов. Максимально возможное количество баллов для каждого задания указаны в скобках. Рубежный контроль считается сданным, если сумма баллов за все задачи (включая теорию) не меньше 18.