Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Комплект задач для рубежного контроля №1

по дисциплине «Линейная алгебра»

Модуль 1: Линейные и евклидовы пространства.

Линейные операторы в линейном пространстве

Вариант 01 (образец)

1. Дайте определение скалярного произведения и евклидова пространства. Что такое норма вектора и угол между векторами в евклидовом пространстве. Приведите примеры. **(3 балла)**

2. Дайте определение собственного вектора и собственного значения линейного оператора. Сформулируйте правила (теоремы) нахождения: (а) собственных чисел; (б) собственных векторов. **(3 балла)**

3. Дана система арифметических векторов $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$ пространства $\mathbf{R}^3$: $\vec{a}_1=(1;\ 0;\ 2)$, $\vec{a}_2=(0;\ 1;\ 1)$, $\vec{a}_3=(-1;\ -1;\ -2)$.

а) Доказать, что она является базисом в пространстве $\mathbf{R}^3$, написать матрицу T перехода от стандартного базиса пространства $\mathbf{R}^3$ к базису $\{\vec{a}\}=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$.

б) Написать формулы преобразования координат при преобразовании базиса. Пользуясь полученными формулами, найти координаты вектора $\vec{b}=(1;\ 2;\ 3)$ в базисе $\{\vec{a}\}=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\}$. **(6 баллов)**

4. Найти базис и размерность линейного пространства решений однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}-x_1+3x_2+3x_3-x_4=0,\\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4=0,\\ -5x_1+11x_2+8x_3-6x_4=0,\\ 3x_1-x_2+5x_3+5x_4=0.\end{cases}$$ **(6 баллов)**

5. Построить ортонормированный базис в линейной оболочке векторов $\vec{g}_1=(-1;\ 1;\ 0;\ 1)$, $\vec{g}_2=(0;\ 1;\ 1;\ 0)$, $\vec{g}_3=(2;\ 0;\ 1;\ 1)$, предварительно убедившись, что указанная система векторов линейно независима. **(6 баллов)**

6. Линейный оператор A в базисе $\{\vec{e}\}=\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ имеет матрицу $A_e=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&1&1\\3&5&0\end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого оператора в базисе $\{\vec{a}\}=\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$, если базисы связаны соотношением:

$$\begin{cases}\vec{a}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2,\\ \vec{a}_2=\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3,\\ \vec{a}_3=\vec{e}_2.\end{cases}$$ **(6 баллов)**

Критерии оценки: Решение каждой задачи оценивается по шкале от 0 до 6 баллов. Максимально возможное количество баллов для каждого задания указаны в скобках. Рубежный контроль считается сданным, если сумма баллов за все задачи (включая теорию) не меньше 18.

Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

Комплект задач для рубежного контроля №1
по дисциплине «Линейная алгебра»
Модуль 1: Линейные и евклидовы пространства.

Линейные операторы в линейном пространстве

Вариант 02 (образец)

1. Дайте определения: евклидова пространства, скалярного произведения, ортогональных векторов. Приведите примеры. Выясните, является ли линейное пространство всех квадратных матриц второго порядка евклидовым относительно операции $(A,B)=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$, где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. **(4 балла)**
2. Дайте определение подобных матриц и сформулируйте свойство их определителей. **(2 балла)**
3. Доказать, что векторы $\vec{a}_1=(2;\ 5;\ 1)$, $\vec{a}_2=(-4;\ -2;\ -2)$, $\vec{a}_3=(1;\ 0;\ -1)$ образуют базис в пространстве арифметических векторов $\mathbf{R}^3$. Найти координаты вектора $\vec{b}=(3;\ 13;\ 0)$ в этом базисе. **(6 баллов)**
4. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов: $\vec{a}_1=(9;\ 7;\ -4;\ 0)$, $\vec{a}_2=(1;\ 1;\ 0;\ -4)$. **(6 баллов)**
5. В базисе $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ евклидова пространства $\mathbf{R}^2$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\vec{a}=(-1;\ -2)$ и $\vec{b}=(1;\ -3)$. Найти $\|\vec{b}\|$ и $(\vec{a},\vec{b})$, если $\|\vec{e}_1\|=1,\ \|\vec{e}_2\|=2,\ \|\vec{a}\|=4.$ **(6 баллов)**
6. Линейный оператор A в базисе $\{\vec{e}\}=\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ имеет матрицу $A_{\vec{e}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Найдите матрицу этого оператора в базисе $\{\vec{a}\}=\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$, если базисы связаны соотношением:
   $$\begin{cases} \vec{a}_1=\vec{e}_1-\vec{e}_2, \\ \vec{a}_2=2\vec{e}_1-\vec{e}_2+\vec{e}_3, \\ \vec{a}_3=\vec{e}_1. \end{cases}$$ **(6 баллов)**

Критерии оценки: Решение каждой задачи оценивается по шкале от 0 до 6 баллов. Максимально возможное количество баллов для каждого задания указаны в скобках. Рубежный контроль считается сданным, если сумма баллов за все задачи (включая теорию) не меньше 18.