Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Модуль 1

Пример решения модульного индивидуального домашнего задания по матричной алгебре

Методические указания

1. Разные преподаватели предъявляют различающиеся требования к оформлению решения. Поэтому при подготовке модульного индивидуального домашнего задания необходимо, опираясь на приведенные здесь примеры, оформлять свое решение в соответствии с требованиями преподавателя, выдавшего это задание.

2. Для каждого задания приводится ссылка на используемый теоретический материал (лекции и тексты). Каждое решение излагается в предположении, что этот материал уже знаком студенту. Поэтому перед разбором решения необходимо подробно ознакомиться с указанным теоретическим материалом.

Задание 1. Найти значение матричного многочлена

$$D = 2A^2 - 3A^T + (5E)^T, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используем материал лекции 1.1.

1. Возведем матрицу A в квадрат:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot 5 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot(-3) + 1\cdot 4 & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-4) \\ 5\cdot 2 + (-3)\cdot 5 + 1\cdot 0 & 5\cdot(-1) + (-3)\cdot(-3) + 1\cdot 4 & 5\cdot 1 + (-3)\cdot 1 + 1\cdot(-4) \\ 0\cdot 2 + 4\cdot 5 + (-4)\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 4\cdot(-3) + (-4)\cdot 4 & 0\cdot 1 + 4\cdot 1 + (-4)\cdot(-4) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -5 & 8 & -2 \\ 20 & -28 & 20 \end{pmatrix}.$$

2. Транспонируем матрицу A:

$$A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислим $(5E)^T$:

$$(5E)^T=5E^T=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 0 & 5\cdot 0 \\ 5\cdot 0 & 5\cdot 1 & 5\cdot 0 \\ 5\cdot 0 & 5\cdot 0 & 5\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу D:

$$D=2A^2-3A^T+(5E)^T=2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ -5 & 8 & -2 \\ 20 & -28 & 20 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 5 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot(-5) & 2\cdot 8 & 2\cdot(-2) \\ 2\cdot 20 & 2\cdot(-28) & 2\cdot 20 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 5 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot(-3) & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 1 & 3\cdot(-4) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 10 & -6 \\ -10 & 16 & -4 \\ 40 & -56 & 40 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 15 & 0 \\ -3 & -9 & 12 \\ 3 & 3 & -12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -2-6+5 & 10-15+0 & -6-0+0 \\ -10-(-3)+0 & 16-(-9)+5 & -4-12+0 \\ 40-3+0 & -56-3+0 & 40-(-12)+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ -7 & 30 & -16 \\ 37 & -59 & 57 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $D=\begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ -7 & 30 & -16 \\ 37 & -59 & 57 \end{pmatrix}.$

Задание 2. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 7 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

а) разложением по элементам какого-либо ряда;

б) сведением к треугольному виду.

Решение. Используем материал текста 1.1.

а) Воспользуемся теоремой разложения. Будем вычислять определитель путем его разложения по элементам первого столбца, т.к. этот столбец содержит нулевой элемент ($a_{21}=0$):

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 7 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 1\cdot A_{31} + 4\cdot A_{41}.$$

Поскольку $0\cdot A_{21}=0$ при любом значении A_{21}, то алгебраическое дополнение A_{21} можно не вычислять, а найти лишь три алгебраических дополнения A_{11}, A_{31} и A_{41}. При вычислении миноров третьего порядка, входящих в состав этих алгебраических дополнений, также воспользуемся теоремой разложения.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \text{(разложение по элементам третьей строки)}=$$

$$= (-2)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -2(6-35)-(14+3) = 58-17 = 41,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot M_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \text{(разложение по элементам второго столбца)}=$$

$$= 5\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 = -5(-2+10)+3(3+2) = -40+15 = -25,$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\cdot M_{41}=-M_{41}=-\begin{vmatrix}-3 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ -1 & 7 & 2\end{vmatrix}=(\text{разложение по элементам первой строки})=$$

$$=-\left((-3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ 7 & 2\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 7\end{vmatrix}\right)=$$

$$=-\left(-3(6-35)-5(4+5)+(14+3)\right)=-\left(87-45+17\right)=-59.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix}\color{red}{1} & -3 & 5 & 1\\ \color{red}{0} & 2 & 3 & 5\\ \color{red}{1} & -1 & 7 & 2\\ \color{red}{4} & -2 & 0 & -1\end{vmatrix}=\color{red}{1}\cdot 41+\color{red}{0}\cdot A_{21}+\color{red}{1}\cdot(-25)+\color{red}{4}\cdot(-59)=41+0-25-236=-220.$$

б) Преобразовав определитель к треугольному виду, мы сможем вычислить его через произведение элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix}\color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ \color{blue}{0} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} & a_{24}\\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{red}{a_{33}} & a_{34}\\ \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{red}{a_{44}}\end{vmatrix}=\color{red}{a_{11}}\cdot\color{red}{a_{22}}\cdot\color{red}{a_{33}}\cdot\color{red}{a_{44}}.$$

Воспользуемся свойствами определителя:

- к элементам третьей строки прибавим элементы первой строки, умноженные на минус один; к элементам четвертой строки прибавим элементы первой строки, умноженные на минус четыре:

$$\begin{vmatrix}1 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 7 & 2\\ 4 & -2 & 0 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}\times(-1) \;\; \times(-4)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 10 & -20 & -5\end{vmatrix};$$

- общий множитель элементов четвертой строки вынесем за определитель:

$$\begin{vmatrix}1 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 10 & -20 & -5\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -4 & -1\end{vmatrix};$$

- к элементам третьей и четвертой строк поочередно прибавим элементы второй строки, умноженные на минус один:

$$5\cdot\begin{vmatrix}1 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -4 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\ \times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -7 & -6\end{vmatrix};$$

- к элементам четвертой строки прибавим элементы третьей строки, умноженные на минус семь, а затем, получив в итоге определитель треугольного вида, перемножим элементы главной диагонали:

$$5\cdot\begin{vmatrix}1 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & -7 & -6\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(-7)\\ \\ \end{matrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 22\end{vmatrix}=5\cdot1\cdot2\cdot(-1)\cdot22=-220.$$

Ответ: –220.

Задание 3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}8 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & -5\end{pmatrix}.$$

Решение. Используем материал лекции 1.2.

Введем следующие обозначения:

$$A=\begin{pmatrix}8 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & -9\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 5 & -5\end{pmatrix}.$$

Тогда исходное уравнение можно переписать в символьном виде:

$$A\cdot X\cdot B=C.$$

Откуда имеем:

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}.$$

Обратные матрицы A^{-1} и B^{-1} существуют, т.к.

$$\det A=\begin{vmatrix}8 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=8\cdot1-3\cdot2=2\neq0,\ \det B=\begin{vmatrix}1 & -5\\ 2 & -9\end{vmatrix}=1\cdot(-9)-2\cdot(-5)=1\neq0.$$

Найдем обратные матрицы методом присоединенной матрицы. Соответствующие присоединенные матрицы A^* и B^* состоят из алгебраических дополнений матриц A и B:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1, & A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3, & A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 8 = 8; \end{matrix}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-9) = -9, & A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-5) = 5, \\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2, & A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1. \end{matrix}$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1,5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^* = \frac{1}{1 \cdot (-9) - 2 \cdot (-5)} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение матричного уравнения:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1,5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 0 + 1 \cdot 5 & 0,5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-5) \\ 1,5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 & 1,5 \cdot (-1) + 4 \cdot (-5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -5,5 \\ 20 & -21,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-9) + (-5,5) \cdot (-2) & 5 \cdot 5 + (-5,5) \cdot 1 \\ 20 \cdot (-9) + (-21,5) \cdot (-2) & 20 \cdot 5 + (-21,5) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34 & 19,5 \\ -137 & 78,5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -34 & 19,5 \\ -137 & 78,5 \end{pmatrix}.$

Задание 4. Исследовать систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

на совместность и решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) матричным способом;

в) методом Гаусса.

Решение. Используем материал лекции 1.3.

Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix},$$

столбец свободных членов –

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

столбец неизвестных –

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы системы:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система является невырожденной, совместной и определенной.

а) Единственное решение невырожденной системы можно найти по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Вычислим определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3, заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы соответственно столбцом свободных членов B:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&0&-3\\0&2&0\\-1&6&-1\end{vmatrix}=-8,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2&1&-3\\1&0&0\\3&-1&-1\end{vmatrix}=4,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&2&0\\3&6&-1\end{vmatrix}=-4.$$

Найдем решение системы по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{-8}{-4}=2,\ x_2=\frac{4}{-4}=-1,\ x_3=\frac{-4}{-4}=1.$$

б) Исходную систему можно представить в матричной форме: $A\cdot X=B$. Тогда $X=A^{-1}\cdot B$, где обратная матрица A^{-1} задается формулой $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$.

Составим присоединенную матрицу A^*, вычислив алгебраические дополнения матрицы A, причем алгебраические дополнения первой строки запишем в первый столбец, второй строки – во второй столбец, а третьей строки – в третий столбец:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\6&-1\end{vmatrix}=-2;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}0&-3\\6&-1\end{vmatrix}=-18;\ A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0&-3\\2&0\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\3&-1\end{vmatrix}=1;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2&-3\\3&-1\end{vmatrix}=7;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2&-3\\1&0\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&6\end{vmatrix}=0;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\3&6\end{vmatrix}=-12;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}=4.$$

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-18&6\\1&7&-3\\0&-12&4\end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -18 & 6 \\ 1 & 7 & -3 \\ 0 & -12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 4,5 & -1,5 \\ -0,25 & -1,75 & 0,75 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим столбец неизвестных:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0,5 & 4,5 & -1,5 \\ -0,25 & -1,75 & 0,75 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 1 + 4,5 \cdot 0 + (-1,5) \cdot (-1) \\ -0,25 \cdot 1 + (-1,75) \cdot 0 + 0,75 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$

в) Решим систему методом Гаусса.

Прямой ход

Составим расширенную матрицу системы

$$\tilde{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

и приведем ее к ступенчатому виду:

- поменяем местами элементы первой и второй строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right);$$

- к элементам второй строки прибавим элементы первой строки, умноженные на минус два, а затем к элементам третьей строки прибавим элементы первой строки, умноженные на минус три:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \times(-2) \ \times(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

В итоге получили матрицу ступенчатого вида.

Мы видим, что $r(A)=r(\tilde{A})=3$. Значит, система совместна. Количество неизвестных $n=3$. Поскольку $r(A)=n$, система определена, т.е. имеет единственное решение (подтверждаем сделанный ранее вывод).

Теперь запишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0, \\ -4x_2-3x_3=1, \\ -x_3=-1. \end{cases}$$

Обратный ход

Методом обратного хода определим неизвестные: из последнего уравнения вычислим x_3; подставим значение x_3 во второе уравнение и вычислим x_2 и т.д.

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0, \\ -4x_2-3=1, \\ x_3=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2\cdot(-1)=0, \\ x_2=-1, \\ x_3=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2, \\ x_2=-1, \\ x_3=1. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=1$ или $X=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Задание 5. Исследовать на совместность и решить систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=5, \\ 2x_1-x_2+x_4=2, \\ x_1+x_2+2x_3-x_4=3. \end{cases}$$

Решение. Используем материал лекции 1.3.

Матрица системы имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

столбец свободных членов –

$$B=\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix},$$

столбец неизвестных –

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

Решим систему методом Гаусса.

Прямой ход

Составим расширенную матрицу системы

$$\tilde{A}=(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\2&-1&0&1&2\\1&1&2&-1&3\end{array}\right)$$

и приведем ее к ступенчатому виду:

- к элементам второй строки прибавим элементы первой строки, умноженные на минус два, а затем к элементам третьей строки прибавим элементы первой строки, умноженные на минус один:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\2&-1&0&1&2\\1&1&2&-1&3\end{array}\right)\begin{matrix}\times(-2)\ \ \times(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&-5&2&-5&-8\\0&-1&3&-4&-2\end{array}\right);$$

- поменяем местами элементы второй и третьей строк:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&-5&2&-5&-8\\0&-1&3&-4&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-1&3&5\\0&-1&3&-4&-2\\0&-5&2&-5&-8\end{array}\right);$$

- к элементам третьей строки прибавим элементы второй строки, умноженные на минус пять:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & -5 & -8 \end{array}\right) \times(-5) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & 15 & 2 \end{array}\right).$$

Получили матрицу ступенчатого вида.

Мы видим, что $r(A)=r(\tilde{A})=3$. Значит, система совместна. Количество неизвестных в системе $n=4$. Поскольку $r(A)<n$, система неопределена, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Составляем базисный минор порядка $r(A)=3$ из элементов получившейся ступенчатой матрицы, при этом элементы последнего столбца, соответствующего столбцу свободных членов, исключаем из рассмотрения. Воспользуемся элементами первых трех столбцов и сразу же убедимся, что составленный нами определитель отличен от нуля:

$$M_3^{(б)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = 13 \neq 0.$$

Поскольку при составлении базисного минора мы использовали первые три столбца, соответствующие неизвестным x_1, x_2, x_3, то неизвестные x_1, x_2, x_3 будут базисными, а неизвестная x_4 - свободной.

Теперь запишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_3 = 5, \\ -x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ -13x_3 + 15x_4 = 2. \end{cases}$$

Пусть свободная неизвестная $x_4 = c$, где c – произвольная постоянная. Отметим, что если бы у нас были две свободные неизвестные, то мы бы их обозначили как c_1 и c_2, поскольку разные свободные неизвестные должны обозначаться по-разному.

Перенесем свободную неизвестную из левых частей уравнений в правую:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 - 3c, \\ -x_2 + 3x_3 = -2 + 4c, \\ -13x_3 = 2 - 15c. \end{cases}$$

Обратный ход

Методом обратного хода определим неизвестные:

- из третьего уравнения находим x_3

$$x_3 = -\frac{2}{13} + \frac{15}{13}c,$$

- из второго уравнения находим x_2

$$x_2 = 3x_3 - (-2 + 4c) = 3 \cdot \left(-\frac{2}{13} + \frac{15}{13}c\right) + 2 - 4c = \frac{20}{13} - \frac{7}{13}c,$$

- из первого уравнения находим x_1

$$x_1 = 5 - 3c - 2x_2 + x_3 = 5 - 3c - 2\left(\frac{20}{13} - \frac{7}{13}c\right) + \left(-\frac{2}{13} + \frac{15}{13}c\right) = \frac{23}{13} - \frac{10}{13}c.$$

Формируем общее решение исходной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{23}{13} - \dfrac{10}{13}c, \\ x_2 = \dfrac{20}{13} - \dfrac{7}{13}c, \\ x_3 = -\dfrac{2}{13} + \dfrac{15}{13}c, \\ x_4 = c. \end{cases}$$

Положив в общем решении $c = 1$, получим одно из частных решений системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Сделаем проверку, подставив найденное частное решение в каждое уравнение исходной системы:

$$\begin{cases} 1+2-1+3=5, \\ 2-1+1=2, \\ 1+1+2-1=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5=5, \\ 2=2, \\ 3=3. \end{cases}$$

Все равенства верны.

Ответ: система совместна, имеет общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{23}{13} - \dfrac{10}{13}c, \\ x_2 = \dfrac{20}{13} - \dfrac{7}{13}c, \\ x_3 = -\dfrac{2}{13} + \dfrac{15}{13}c, \\ x_4 = c. \end{cases} \quad \text{или } X_{Общ.} = \begin{pmatrix} \dfrac{23}{13} - \dfrac{10}{13}c \\ \dfrac{20}{13} - \dfrac{7}{13}c \\ -\dfrac{2}{13} + \dfrac{15}{13}c \\ c \end{pmatrix}, \text{ где } c \text{ – произвольная постоянная.}$$

Задание 6. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ -7x_1 + 6x_2 + x_3 - 15x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Используем материал текста 1.3.

Данная система линейных алгебраических уравнений является однородной. Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ -7 & 6 & 1 & -15 & -5 \end{pmatrix},$$

столбец свободных членов –

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

столбец неизвестных –

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Однородная система всегда совместна. Для нахождения решения применим метод Гаусса.

Прямой ход

Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

- к элементам второй строки прибавим элементы первой строки, умноженные на минус пять, затем к элементам третьей строки прибавим элементы первой строки, умноженные на минус четыре, и, наконец, к элементам четвертой строки прибавим элементы первой строки, умноженные на семь:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2\\ 5 & 1 & -1 & 2 & 2\\ 4 & -1 & 2 & 3 & 1\\ -7 & 6 & 1 & -15 & -5 \end{pmatrix} \overset{\times(-5)\quad \times(-4)\quad \times 7}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2\\ 0 & 21 & -1 & -33 & -8\\ 0 & 15 & 2 & -25 & -7\\ 0 & -22 & 1 & 34 & 9 \end{pmatrix};$$

- к элементам второй строки прибавим соответствующие элементы четвертой строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2\\ 0 & 21 & -1 & -33 & -8\\ 0 & 15 & 2 & -25 & -7\\ 0 & -22 & 1 & 34 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 15 & 2 & -25 & -7\\ 0 & -22 & 1 & 34 & 9 \end{pmatrix};$$

- к элементам третьей строки прибавим элементы второй строки, умноженные на пятнадцать, затем к элементам четвертой строки прибавим элементы второй строки, умноженные на минус двадцать два:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 15 & 2 & -25 & -7\\ 0 & -22 & 1 & 34 & 9 \end{pmatrix} \overset{\times 15\quad \times(-22)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -10 & 8\\ 0 & 0 & 1 & 12 & -13 \end{pmatrix};$$

- разделим элементы третьей строки на два:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -13 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ :2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -13 \end{pmatrix};$$

- к элементам четвертой строки прибавим элементы третьей строки, умноженные на минус один:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -13 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \times(-1) \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -17 \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу ступенчатого вида, из которой следует, что $r(A)=4$. Количество неизвестных $n=5$. Поскольку $r(A)<n$, система неопределена, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Базисным минором порядка $r(A)=4$ получившейся ступенчатой матрицы является

$$M_4^{(б)} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = -17 \neq 0.$$

Поскольку при составлении базисного минора мы использовали первые четыре столбца ступенчатой матрицы, которые соответствуют неизвестным x_1, x_2, x_3, x_4, то неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4 будут базисными, а неизвестная x_5 – свободной.

Теперь запишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0, \\ 17x_4 - 17x_5 = 0. \end{cases}$$

Пусть свободная неизвестная $x_5 = c$, где c – произвольная постоянная. Отметим, что если бы у нас были две свободные неизвестные, то мы бы их обозначили как c_1 и c_2, поскольку разные свободные неизвестные должны обозначаться по-разному.

Перенесем свободную неизвестную из левых частей уравнений в правую:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_4 = -2c, \\ -x_2 + x_4 = -c, \\ x_3 - 5x_4 = -4c, \\ 17x_4 = 17c. \end{cases}$$

Обратный ход

Методом обратного хода определим неизвестные:

- из четвертого уравнения находим x_4

$$x_4 = c,$$

- из третьего уравнения находим x_3

$$x_3 = -4c + 5x_4 = -4c + 5c = c,$$

- из второго уравнения находим x_2

$$x_2 = x_4 + c = c + c = 2c,$$

- из первого уравнения находим x_1

$$x_1 = -2c + 4x_2 - 7x_4 = -2c + 8c - 7c = -c.$$

Формируем общее решение исходной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -c, \\ x_2 = 2c, \\ x_3 = c, \\ x_4 = c, \\ x_5 = c. \end{cases}$$

Число решений, входящих в фундаментальную систему решений, равно $k = n - r = 5 - 4 = 1$, так как количество неизвестных $n = 5$, а ранг матрицы системы $r = 4$.

Положив в общем решении $c=1$, найдем одно частное решение, из которого состоит фундаментальная система решений:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 1, \\ x_5 = 1. \end{cases}$$

Выделить из общего решения фундаментальную систему решений можно и другим способом. Запишем общее решение в виде вектора-столбца:

$$X_{Общ.} = \begin{pmatrix} -c \\ 2c \\ c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c \cdot F.$$

Получили вектор-столбец $F = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – некоторое частное решение, образующее фундаментальную систему решений.

Сделаем проверку, подставив найденное фундаментальное решение в каждое уравнение исходной системы:

$$\begin{cases} -1-8+7+2=0, \\ -5+2-1+2+2=0, \\ -4-2+2+3+1=0, \\ 7+12+1-15-5=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0, \\ 0=0, \\ 0=0, \\ 0=0. \end{cases}$$

Все равенства верны.

Ответ: общее решение: $x_1 = -c,\ x_2 = 2c,\ x_3 = x_4 = x_5 = c$, где c – произвольная постоянная; фундаментальная система решений включает только одно частное решение: $x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = x_4 = x_5 = 1.$