Аналитическая геометрия
Модуль 2

Аналитическая геометрия
на плоскости и в пространстве.
Комплексные числа и многочлены

Текст 2.4

(для ГУИМЦ, 2023)

Аннотация

Многочлены в действительной и комплексной областях. Теоремы о тождестве двух многочленов. Корень многочлена и его кратность. Основная теорема алгебры. Разложение многочленов с комплексными и действительными коэффициентами на неприводимые множители. Деление с остатком, теорема Безу. Теорема о рациональном корне.

1 Понятие многочлена

Определение

Функция вида

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

где $n \geq 0$ – целое число, называется **многочленом** (или **полиномом**) от переменной z.

Число n называется **степенью многочлена**. Числа a_0, a_1, ..., a_n – **коэффициенты многочлена** (действительные или комплексные), $a_n \neq 0$ – **старший коэффициент**, a_0 – **свободный член**. Независимая переменная z может принимать как комплексные, так и действительные значения. В последнем случае переменную обычно обозначают буквой x.

Если числа a_0, a_1, ..., a_n комплексные, то многочлен $P_n(z)$ называется **многочленом с комплексными коэффициентами**. Если числа a_0, a_1, ..., a_n действительные, то многочлен $P_n(z)$ называется **многочленом с действительными коэффициентами**.

Иногда нумерацию коэффициентов многочлена начинают с нуля, а не с n. В этом случае многочлен записывается так:
$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n,$$
где $a_0 \neq 0$.

Далее рассмотрим многочлены с комплексными коэффициентами от переменной z, определенной на множестве комплексных чисел.

Определение

Два многочлена называются **тождественно равными**, если они принимают равные значения при всех допустимых значениях переменной z.

Обозначение: $P_n(z) = Q_m(z)$ или $P_n(z) \equiv Q_m(z)$.

Два многочлена могут не являться тождественно равными, но при этом принимать равные значения в некоторых точках (при некоторых значениях переменной z). Например, многочлены $P_2(z) = -z^2 + 2z$ и $Q_2(z) = z^2$ совпадают при $z = 0$ и $z = 1$.

Теорема (о тождестве двух многочленов)

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их степени и совпадают коэффициенты при равных степенях переменной z.

Следствие

Если многочлен тождественно равен нулю, то все его коэффициенты равны нулю.

Теорема (достаточное условие тождественного равенства двух многочленов)

Если значения двух многочленов степени не выше n совпадают в каких-либо $(n+1)$ различных точках z_1, z_2,... ,z_{n+1}, то эти многочлены тождественно равны.

2 Разложение многочленов на неприводимые множители

Определение

Число z_0 называют **корнем** или **нулем** многочлена $P_n(z)$, если

$$P_n(z_0) = 0.$$

Определение

Корень z_0 многочлена $P_n(z)$ называется **корнем кратности** k, если многочлен $P_n(z)$ можно представить в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z),$$

где $Q_{n-k}(z)$ – многочлен степени $n-k$, причем $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Теорема (основная теорема алгебры)

Любой многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один комплексный корень.

С помощью данной теоремы можно доказать следующее свойство многочленов.

Теорема (о разложении многочлена на линейные множители)

Любой многочлен ненулевой степени $P_n(z)$ может быть разложен на n линейных множителей:

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n),$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n$ – комплексные корни многочлена (не обязательно различающиеся), a_n – старший коэффициент.

Пример: $z^2 + a^2 = (z - ai)(z + ai)$.

Если в разложении многочлена $P_n(z)$ на линейные множители некоторые из них окажутся одинаковыми, то их можно объединить, и тогда разложение на множители будет иметь вид:

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m},$$

при этом $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. В этом случае корень z_1 является корнем кратности k_1, z_2 – корнем кратности k_2 и т.д. Данное представление многочлена $P_n(z)$ называют его **разложением на неприводимые множители в комплексной плоскости**.

Замечания

1. Утверждение “многочлен имеет корень z_0 кратности k” эквивалентно утверждению “многочлен имеет k одинаковых корней, равных z_0”.

2. Составляя разложение многочлена на множители, следует каждый корень многочлена учитывать столько раз, какова его кратность.

Теорема (о количестве корней многочлена)

Любой многочлен степени n имеет ровно n корней с учетом их кратности.

Пример: Многочлен $P_4(z) = (z - 1)^3(z + 1)$, степень которого равна 4, имеет корень $z_1 = 1$ кратности три и корень $z_2 = -1$ кратности один. Это эквивалентно тому, что наш многочлен $P_4(z)$ имеет три одинаковых корня, равных числу 1, и один корень, равный числу -1, т.е. суммарно 4 корня.

Теперь рассмотрим многочлены с действительными коэффициентами от переменной z, по-прежнему определенной на множестве комплексных чисел.

Теорема (о комплексных корнях многочлена с действительными коэффициентами)

Если многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + bi$, то он имеет и сопряженный корень $a - bi$, т.е. комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряженные.

Следствия

1. Многочлен с действительными коэффициентами может иметь лишь четное число комплексных корней.

2. Любой многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Теорема (о разложении на множители многочлена с действительными коэффициентами)

Любой многочлен с действительными коэффициентами степени n разлагается единственным способом в произведение многочленов первой и второй степеней с действительными коэффициентами и соответствующей кратности:
$P_n(z) = a_n(z - x_1)^{k_1} \ldots (z - x_r)^{k_r}(z^2 + p_1 z + q_1)^{l_1} \ldots (z^2 + p_s z + q_s)^{l_s}$,
где линейные множители имеют действительные корни $x_1, \ldots, x_r$, а квадратные – соответствующую пару сопряженных комплексных корней вида $a \pm bi$. При этом

$$k_1 + \ldots + k_r + 2l_1 + \ldots + 2l_s = n.$$

Это представление многочлена с действительными коэффициентами называют его **разложением на неприводимые множители на множестве действительных чисел** в том смысле, что квадратные трехчлены в этом разложении не раскладываются на линейные множители с действительными коэффициентами, т.е. имеют отрицательные дискриминанты.

Пример: Многочлен $P_4(z) = z^4 - 1$ имеет разложение на неприводимые множители:

1) $z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$ – в комплексной области;
2) $z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z^2+1)$ – в области действительных чисел.

3 Деление многочленов

Многочлены можно складывать, вычитать, перемножать, делить, возводить в натуральную степень; при этом снова получается многочлен.

Если складываются или вычитаются два многочлена разной степени, то в результате получится многочлен, степень которого равна большей из имеющихся степеней. Если складываются или вычитаются многочлены одной и той же степени, то в результате получится многочлен той же или меньшей степени.

Произведение двух многочленов есть многочлен, степень которого равна сумме степеней данных многочленов. Если многочлен степени n возвести в степень m, то получится многочлен степени $n \cdot m$.

В некоторых случаях выполнимо и деление многочлена на многочлен. Говорят, что многочлен $P(z)$ делится на многочлен $Q(z)$, если существует такой многочлен $S(z)$, что $P(z) = Q(z) \cdot S(z)$. Как и для целых чисел, для многочленов рассматривается деление с остатком.

Теорема (о делении многочленов с остатком)

Для любых двух многочленов ненулевой степени $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ $(n \geq m)$ существует пара многочленов $S_{n-m}(z)$ и $R_l(z)$ таких, что степень многочлена $R_l(z)$ меньше степени многочлена $S_{n-m}(z)$ и

$$P_n(z) = Q_m(z) \cdot S_{n-m}(z) + R_l(z).$$

При этом многочлен $P_n(z)$ – делимое, $Q_m(z)$ – делитель, $S_{n-m}(z)$ – частное (или неполное частное), $R_l(z)$ – остаток и $l < n - m$.

Теорема Безу

Остаток от деления многочлена ненулевой степени $P_n(z)$ на двучлен $(z - z_0)$ равен $P_n(z_0)$.

Следствие

Для того, чтобы многочлен ненулевой степени $P_n(z)$ имел корень z_0, необходимо и достаточно, чтобы он делился на двучлен $(z - z_0)$ без остатка, т.е. чтобы было справедливым представление
$$P_n(z) = (z - z_0)Q_{n-1}(z),$$
где $Q_{n-1}(z)$ – многочлен степени $n - 1$.

Теорема (о рациональном корне)

Если многочлен с целыми коэффициентами $P_n(z)$ имеет рациональный корень p/q, то p является делителем свободного члена a_0, q – делителем старшего коэффициента a_n.

Следствие

Свободный член a_0 многочлена $P_n(z)$ с целыми коэффициентами делится на любой целый корень этого многочлена. Если старший коэффициент $a_n = 1$, то все рациональные корни многочлена $P_n(z)$ являются целыми.

Теорема Безу, теорема о рациональном корне и следствия из них позволяют легко находить рациональные корни уравнений с целыми (рациональными) коэффициентами.

Пример: Разложим на множители многочлен с целыми коэффициентами
$$P_3(z) = z^3 - 3z^2 - z + 6.$$

Попробуем найти целочисленный корень этого многочлена. Если он есть, то согласно следствию из теоремы о рациональном корне, его следует искать среди делителей свободного члена данного многочлена, т.е. среди делителей числа 6. Такими делителями являются числа: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Подставим поочередно эти числа в выражение для $P_3(z)$. Имеем:

$P_3(1) = 1 - 3 - 1 + 6 = 3 \neq 0$,

$P_3(-1) = -1 - 3 + 1 + 6 = 3 \neq 0$,

$P_3(2) = 8 - 12 - 2 + 6 = 0$.

Итак, $z = 2$ – корень многочлена $P_3(z)$, следовательно, $P_3(z)$ можно представить в виде

$$P_3(z) = (z-2)Q_2(z).$$

Чтобы найти многочлен $Q_2(z)$, можно, например, разделить $P_3(z)$ на $(z-2)$ уголком:

$$\begin{array}{rrrr|l}
z^3 & -3z^2 & -z & +6 & z-2 \\ \cline{5-5}
\underline{z^3} & \underline{-2z^2} & & & z^2-z-3 \\
 & -z^2 & -z & & \\
 & \underline{-z^2} & \underline{+2z} & & \\
 & & -3z & +6 & \\
 & & \underline{-3z} & \underline{+6} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Получили, что $Q_2(z) = z^2 - z - 3$. Корнями многочлена $Q_2(z)$ являются

$$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Значит,

$$z^2 - z - 3 = \left(z - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right).$$

Тогда

$$P_3(z) = (z-2)\left(z - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right).$$