Аналитическая геометрия
Модуль 2
Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Комплексные числа и многочлены
Текст 2.3
(для ГУИМЦ, 2023)

Аннотация

Поверхности второго порядка. Общее уравнение поверхности второго порядка. Виды поверхностей и их канонические уравнения: эллипсоид, однополостной гиперболоид, двуполостной гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид. Цилиндрические поверхности, конические поверхности.

1 Поверхности второго порядка

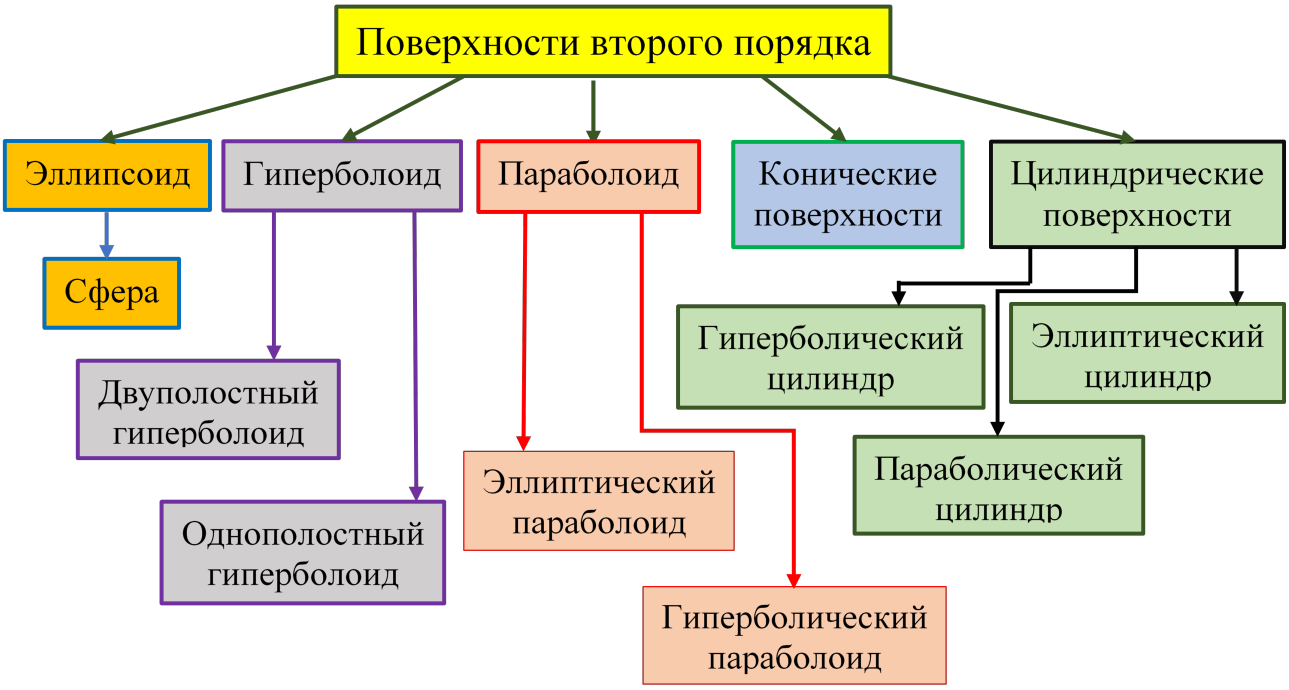
Определение

Поверхностью второго порядка называется множество точек трехмерного пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени от трех переменных

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = 0,$$

называемому **общим уравнением поверхности второго порядка**. По крайней мере одно из чисел A, B, C, D, E или F отлично от нуля.

К поверхностям второго порядка относятся: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндры.



2 Эллипсоид

Определение

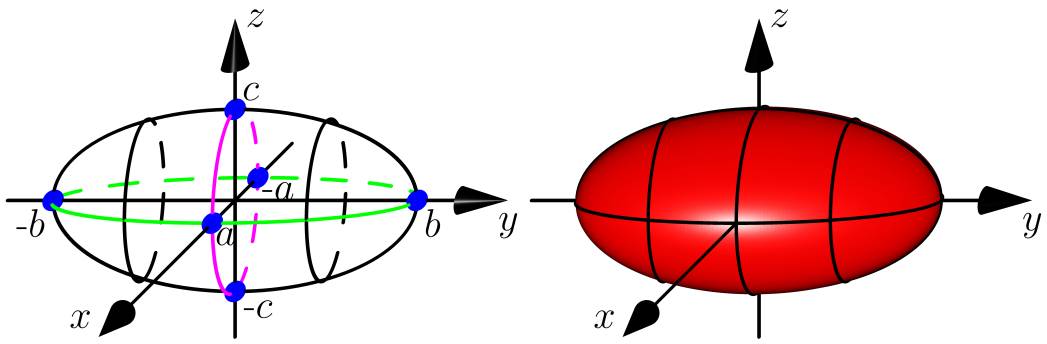
Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ – полуоси эллипсоида.

Если полуоси a, b, c различны, то эллипсоид называется **трехосным**; если какие-либо две полуоси равны, то имеем **эллипсоид вращения**; если все три полуоси равны, то получаем **сферу**.

Пример эллипсоида приведен ниже на правом рисунке, его же схематичное изображение дано на левом рисунке.



Геометрические свойства эллипсоида:

1. Сечения эллипсоида плоскостями $x = h$, $y = h$ или $z = h$, где h – некоторое число, есть эллипсы, уравнения которых получаются из уравнения эллипсоида путем замены соответствующей переменной x, y или z на число h. Например, сечение эллипсоида плоскостью $z = 0$ есть эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (зеленая линия на левом рис.), а сечение эллипсоида плоскостью $y = 0$ есть эллипс $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ (фиолетовая линия на левом рис.).

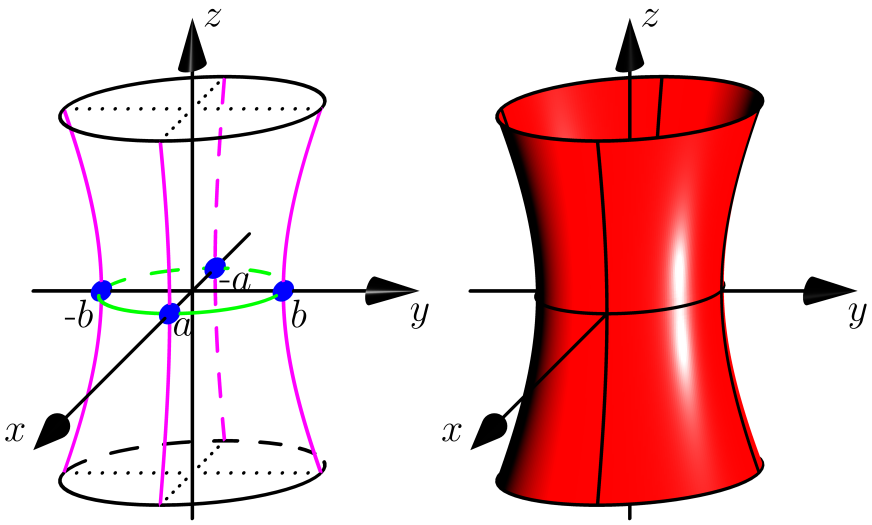
2. Уравнение
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$
задает **мнимый эллипсоид**. Эта поверхность не имеет в своем составе ни одной точки с действительными координатами.

3 Гиперболоиды

3.1 Однополостный гиперболоид

Определение

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$
где $a > 0, b > 0, c > 0$.



Геометрические свойства однополостного гиперболоида:

1. Каждая горизонтальная плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу. Эллипс $x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$, получающийся при $h = 0$, называется **горловым эллипсом** гиперболоида (зеленая линия на левом рис.).

2. Вертикальные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают гиперболоид по гиперболам $y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ и $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ (фиолетовые линии на левом рис.).

3. Ось Oz называется **продольной осью** гиперболоида, оси Ox и Oy называются **поперечными осями** гиперболоида.

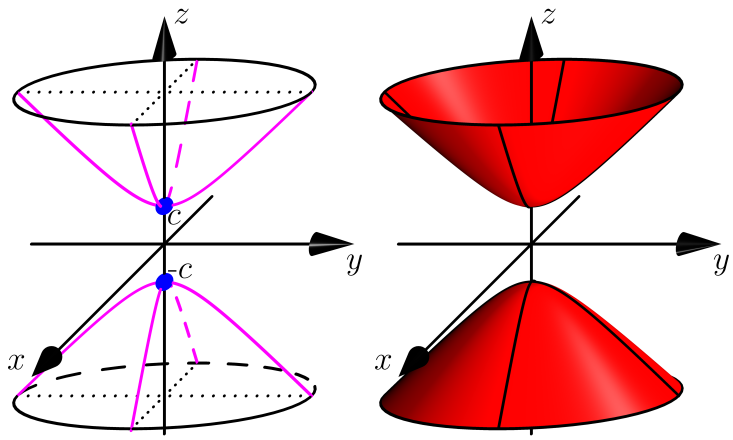
3.2 Двуполостный гиперболоид

Определение

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где $a > 0, b > 0, c > 0$.



Геометрические свойства двуполостного гиперболоида:

1. Каждая горизонтальная плоскость $z = h$ при $|h| < c$ не пересекает гиперболоид, при $|h| = c$ имеет единственную общую точку с гиперболоидом, при $|h| > c$ пересекает гиперболоид по эллипсу.

2. Вертикальные плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают гиперболоид по сопряженным гиперболам $y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$ и $x^2/a^2 - z^2/c^2 = -1$ (фиолетовые линии на левом рис.).

3. Поверхность состоит из двух симметричных полостей, имеющих форму неограниченных чаш, расположенных в полупространствах $z > 0$ и $z < 0$.

4. Ось Oz называется **продольной осью** гиперболоида, оси Ox и Oy называются **поперечными осями** гиперболоида.

4 Параболоиды

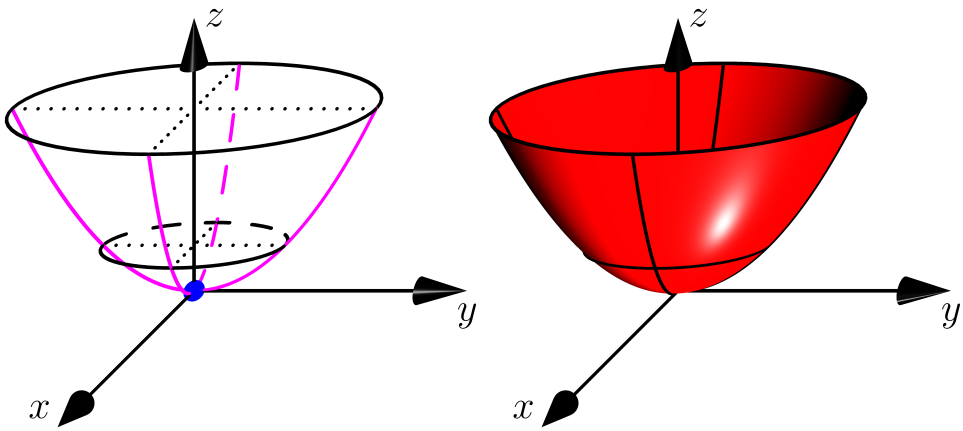
4.1 Эллиптический параболоид

Определение

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

где $a > 0, b > 0$.



Геометрические свойства эллиптического параболоида:

1. Каждая горизонтальная плоскость $z = h$ при $h < 0$ не пересекает параболоид, при $h = 0$ имеет с ним единственную общую точку $O(0, 0, 0)$, при $h > 0$ пересекает параболоид по эллипсу.

2. Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают параболоид по параболам $z = y^2/b^2$ и $z = x^2/a^2$ (фиолетовые линии на левом рис.).

3. Поверхность состоит из одной полости, имеющей форму неограниченной чаши, расположенной в полупространстве $z \geq 0$.

4. Ось Oz называется осью эллиптического параболоида, точка $O(0, 0, 0)$ - его вершиной.

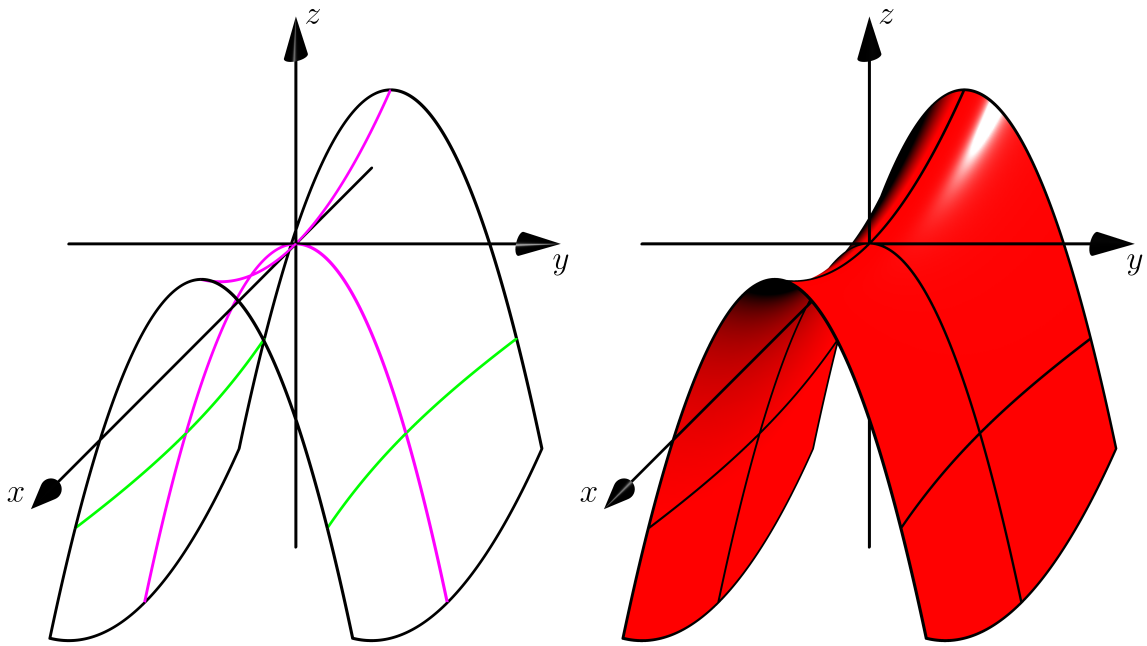
4.2 Гиперболический параболоид

Определение

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

где $a > 0, b > 0$.



Геометрические свойства гиперболического параболоида:

1. Каждая горизонтальная плоскость $z = h$ при $h < 0$ пересекает параболоид по гиперболе, действительная ось которой параллельна оси Oy, а мнимая – оси Ox (зеленые линии на левом рис.). При $h > 0$ плоскость $z = h$ также пересекает параболоид по гиперболе, но ее действительная ось уже параллельна оси Ox, а мнимая – оси Oy. Плоскость $z = 0$ пересекает параболоид по паре прямых.

2. Плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают параболоид по параболам $z = -y^2/b^2$ и $z = x^2/a^2$ (фиолетовые линии на левом рис.).

3. Поверхность имеет вид седла и может быть получена при движении параболы $z = -y^2/b^2$, когда ее вершина начинает скользит по параболе $z = x^2/a^2$ вдоль оси Ox.

5 Конические поверхности

Определение

Коническая поверхность – это поверхность, образованная прямыми, проходящими через каждую точку данной кривой и некоторую фиксированную точку пространства, не лежащую на этой кривой. Данная кривая называется **направляющей**, фиксированная точка – **вершиной**, а прямые – **образующими** конической поверхности.

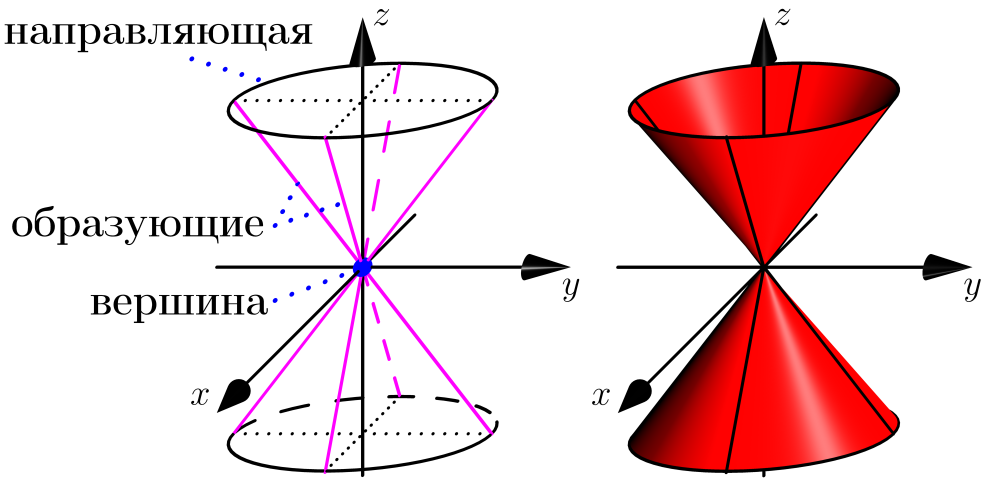
Далее рассмотрим наиболее распространенный частный случай конической поверхности, у которой в качестве направляющей выступает эллипс.

Определение

Эллиптическим конусом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется **каноническим уравнением**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.



Геометрические свойства эллиптического конуса:

1. Сечения эллиптического конуса горизонтальными плоскостями $z = h$ при $h \neq 0$ представляют собой эллипсы. Прямая проходящая через центры этих эллипсов, называется **осью конуса**. Сечение конуса плоскостью $z = 0$ состоит из одной точки $O(0, 0, 0)$.

2. Сечения конуса плоскостями $x = h$ и $y = h$, $h \neq 0$ являются гиперболами.

3. Сечения конуса плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ представляют собой пары пересекающихся прямых (фиолетовые линии на левом рис.).

4. Поверхность состоит из двух симметричных частей, расположенных в полупространствах $z \geq 0$ и $z \leq 0$.

6 Цилиндрические поверхности

Определение

Цилиндрическая поверхность – это поверхность, образованная параллельными прямыми, проходящими через каждую точку данной кривой. Данная кривая называется **направляющей**, а параллельные прямые – **образующими** цилиндрической поверхности.

Если образующие параллельны какой-либо оси координат, то каноническое уравнение цилиндра не содержит в уравнении соответствующую переменную. В этом случае уравнение цилиндра повторяет уравнение своей направляющей, а название цилиндра прямо вытекает из названия направляющей.

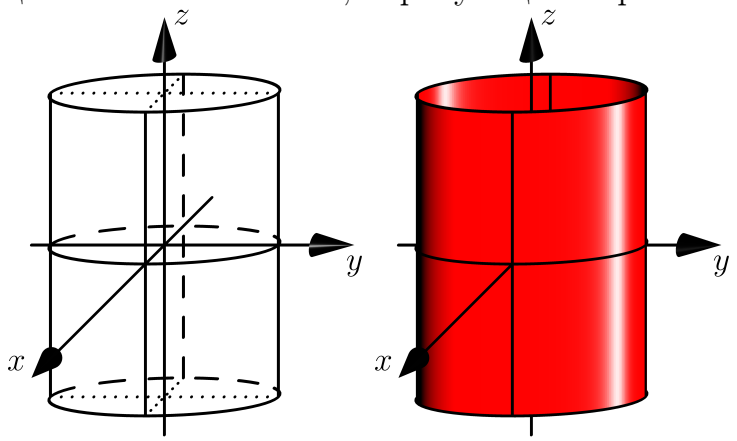
Для построения цилиндра нужно построить направляющую в той плоскости, в которой она задана, а затем «тянуть» эту линию вдоль той оси, координата которой отсутствует в уравнении.

Цилиндров существует достаточно много. Рассмотрим те из них, направляющими которых служат кривые второго порядка (считаем, что $a > 0, b > 0, p > 0$):

- **эллиптический цилиндр** с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

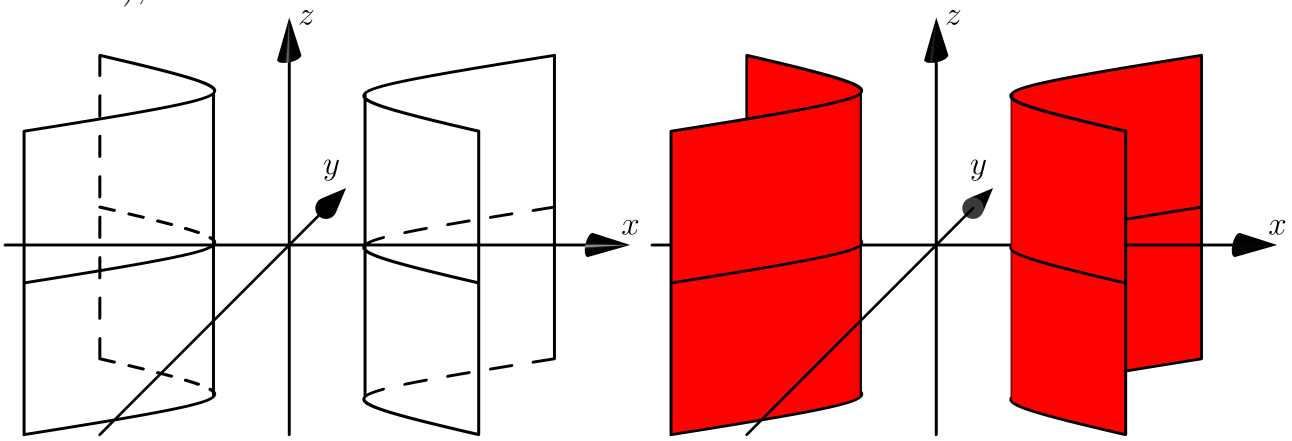
(направляющей является эллипс, образующая параллельна оси Oz);



- **гиперболический цилиндр** с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

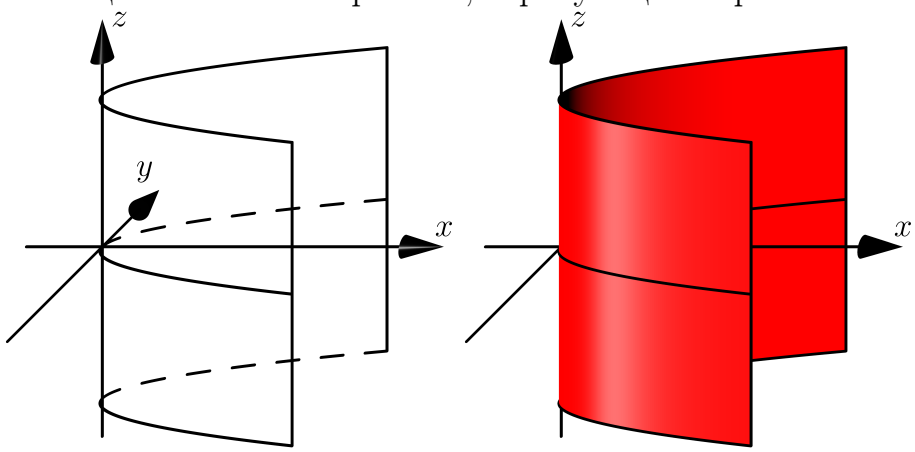
(направляющей является гипербола, образующая параллельна оси Oz);



- **параболический цилиндр** с каноническим уравнением

$$y^2 = 2px$$

(направляющей является парабола, образующая параллельна оси Oz).



Отметим, что если направляющей является пара пересекающихся (параллельных, совпадающих) прямых, то соответствующая им цилиндрическая поверхность представляет собой пару пересекающихся (параллельных, совпадающих) плоскостей:

- Уравнение **пары пересекающихся плоскостей**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

- Уравнение **пары параллельных плоскостей**

$$y^2 = a^2.$$

- Уравнение **пары мнимых параллельных плоскостей**

$$y^2 = -a^2.$$

- Уравнение **пары совпадающих плоскостей**

$$y^2 = 0.$$