Аналитическая геометрия
Модуль 2

Аналитическая геометрия
на плоскости и в пространстве.
Комплексные числа и многочлены

Текст 2.2

(для ГУИМЦ, 2023)

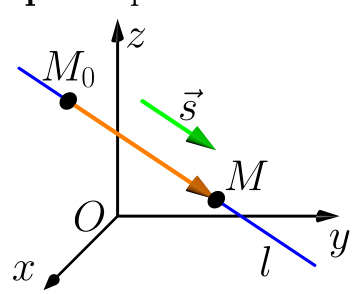
Аннотация

Прямая в пространстве: различные виды уравнений прямой, расстояние от точки до прямой, взаимное расположение прямых, расстояние между прямыми, взаимное расположение прямой и плоскости.

1 Прямая линия в пространстве

1.1 Канонические уравнения прямой

Пусть в пространстве заданы декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольная прямая l. Известны лежащая на данной прямой точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{s} = (m, p, q)$, параллельный этой прямой или лежащий на ней. Вектор $\vec{s}$ называют **направляющим вектором** прямой l.



Точка $M(x, y, z)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ коллинеарен вектору $\vec{s}$.

Следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны. Откуда получаем **канонические уравнения прямой**:

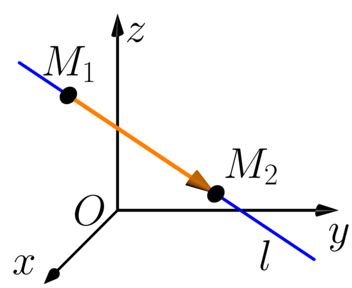
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{q}.$$

1.2 Уравнения прямой, проходящей через две точки

Рассмотрим в пространстве прямую l, проходящую через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Тогда вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(\underbrace{x_2-x_1}_{m},\underbrace{y_2-y_1}_{p},\underbrace{z_2-z_1}_{q})$$

будет направляющим вектором прямой l.



Взяв в канонических уравнениях прямой в качестве точки M_0 данную точку M_1 и положив $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$, получим **уравнения прямой, проходящей через две точки**:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

1.3 Параметрические уравнения прямой

Приравняем канонические уравнения прямой к некоторому параметру $t\in R$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{q}=t$$

и представим получившееся тройное равенство в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} (x - x_0)/m = t, \\ (y - y_0)/p = t, \\ (z - z_0)/q = t. \end{cases}$$

Откуда получаем **параметрические уравнения прямой**

а) *в координатной форме*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + pt, \\ z = z_0 + qt, \end{cases}$$

б) *в векторной форме*

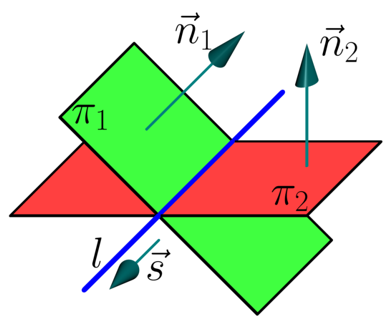
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t,$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{s} = (m, p, q)$.

1.4 Общие уравнения прямой

Прямую l в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей π_1 и π_2. Точки этой прямой одновременно принадлежат обеим плоскостям, а значит, их координаты должны одновременно удовлетворять общим уравнениям обеих плоскостей, которые вместе образуют **общие уравнения прямой**:

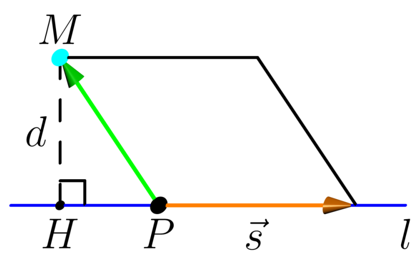
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$



Так как прямая l перпендикулярна нормальным векторам $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей π_1 и π_2, то за ее направляющий вектор можно взять их векторное произведение: $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

2 Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть в пространстве заданы прямая l и точка M. Известны координаты точки P, лежащей на прямой l, и направляющий вектор $\vec{s}$ этой же прямой. Необходимо найти расстояние d от точки M до прямой l.



Проведем вектор $\overrightarrow{PM}$ и построим параллелограмм на векторах $\overrightarrow{PM}$ и $\vec{s}$. Тогда расстояние d от точки M до прямой l есть длина высоты этого параллелограмма:

$$d = MH = \frac{S_{\text{пар}}}{|\vec{s}|} = \frac{|\overrightarrow{PM} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}.$$

3 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

В пространстве две прямые могут
(1) совпадать, (2) быть параллельными, (3) пересекаться,
(4) скрещиваться (не лежать в одной плоскости).

В рамках каждого из указанных случаев положение одной прямой относительно другой характеризуется с помощью угла, при этом **угол между совпадающими** и **параллельными** прямыми всегда полагается равным нулю.

Определение

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется величина наименьшего из углов, образованных этими прямыми.

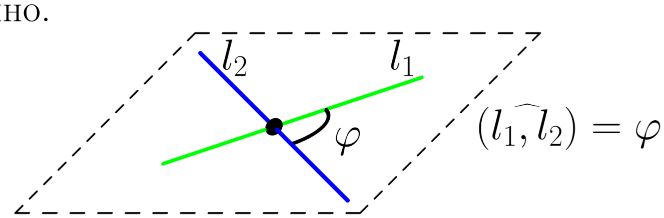
Определение

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется величина наименьшего из углов, образованных любыми двумя пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

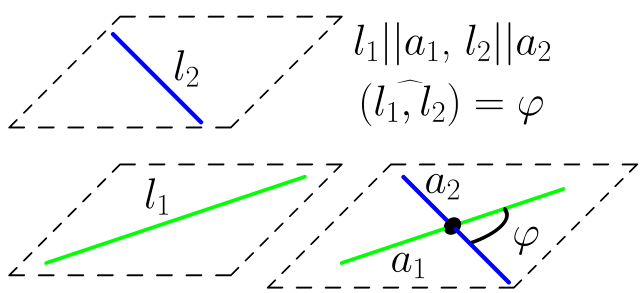
Обозначение угла между прямыми l_1 и l_2: $(\widehat{l_1, l_2})$, φ.

Примеры:

1. Угол φ между пересекающимися прямыми l_1 и l_2 определяется непосредственно.



2. Угол φ между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 определяется опосредовано как угол между произвольными пересекающимися прямыми a_1 и a_2, параллельными исходным прямым l_1 и l_2.



Рассмотрим две прямые l_1 и l_2, расположенные друг относительно друга произвольным образом, т.е. они могут пересекаться, скрещиваться и т.д. Известны их канонические уравнения:

$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{p_1} = \frac{z - z_1}{q_1}, \; l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{p_2} = \frac{z - z_2}{q_2}.$$

Пусть угол между прямыми l_1 и l_2 равен φ, а угол между направляющими векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ этих же прямых есть α. Тогда

$$\varphi = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \le 90^\circ, \\ 180^\circ - \alpha, \text{ если } \alpha > 90^\circ. \end{cases}$$

Поэтому

$$\cos\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}.$$

Данная расчетная формула позволяет вычислить угол между прямыми при любом их взаимном расположении.

Условие параллельности или совпадения прямых ($\varphi = 0^\circ$):

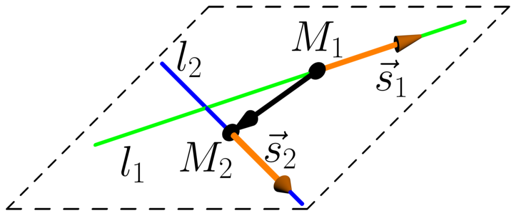
$$l_1 || l_2 \text{ или } l_1 = l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 || \vec{s}_2.$$

Условие перпендикулярности прямых ($\varphi = 90^\circ$):

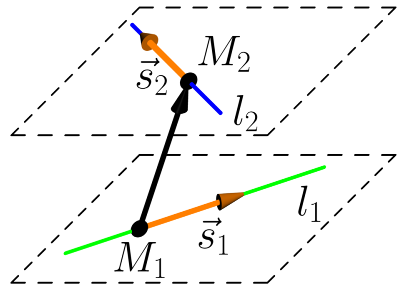
$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2.$$

Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{s}_1 = (m_1, p_1, q_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, p_2, q_2)$ лежат в одной плоскости или, другими словами, компланарны (см. рисунки ниже). В этом случае из геометрического свойства смешанного произведения векторов имеем **условие**, при котором **прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости**:

$$\Delta = \overrightarrow{M_1M_2}\vec{s}_1\vec{s}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & p_1 & q_1 \\ m_2 & p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$



Прямые l_1 и l_2 лежат
в одной плоскости



Прямые l_1 и l_2
скрещиваются

Алгоритм определения взаимного расположения прямых:

1. По каноническим уравнениям прямых l_1 и l_2 определяем их направляющие векторы $\vec{s}_1 = (m_1, p_1, q_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, p_2, q_2)$, а также принадлежащие им точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

2. Вычисляем определитель Δ. Если $\Delta \neq 0$, то прямые скрещиваются. Если $\Delta = 0$, то прямые лежат в одной плоскости.

3. Пусть $\Delta = 0$. Если $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$, то прямые пересекаются. Если $\vec{s}_1 || \vec{s}_2$, то прямые либо параллельны, либо совпадают.

4. Пусть $\Delta = 0$ и $\vec{s}_1 || \vec{s}_2$. Подставим точку $M_1 \in l_1$ в канонические уравнения прямой l_2. Если получаем верные тождества, то прямые совпадают. В противном случае, прямые параллельны.

4 Расстояние между двумя прямыми в пространстве

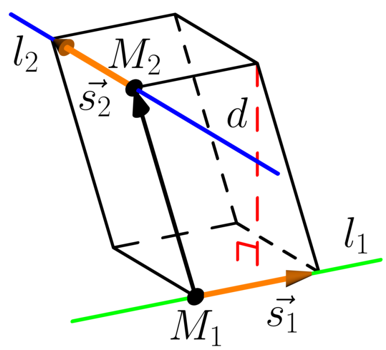
Если две прямые в пространстве пересекаются или совпадают, то расстояние между ними полагается равным нулю. Поэтому имеет смысл говорить только о расстоянии между параллельными и скрещивающимися прямыми.

Случай 1. Прямые l_1 и l_2 параллельны.

В этом случае расстояние между прямыми l_1 и l_2 есть расстояние от произвольно выбранной точки прямой l_1 до прямой l_2, и оно вычисляется по приведенной ранее формуле расстояния от точки до прямой.

Случай 2. Прямые l_1 и l_2 скрещиваются.

Скрещивающиеся прямые – это прямые, которые не лежат в одной плоскости. Через две скрещивающиеся прямые можно провести две параллельные плоскости единственным образом. Расстояние между скрещивающимися прямыми есть расстояние между этими плоскостями, и оно может быть найдено как высота параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\vec{s}_1 = (m_1, p_1, q_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, p_2, q_2)$, где $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ – направляющие векторы прямых l_1 и l_2, а $M_1 \in l_1$ и $M_2 \in l_2$ – произвольные точки лежащие на этих же прямых.



Тогда из геометрического смысла смешанного произведения векторов вытекает **формула для вычисления расстояния d между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2:**

$$d = \frac{V_{\text{пар}}}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{|\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

5 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

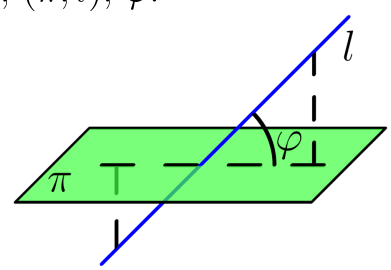
Пусть в пространстве заданы прямая l своим каноническим уравнением и плоскость π общим уравнением:

$$l : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}, \ \pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

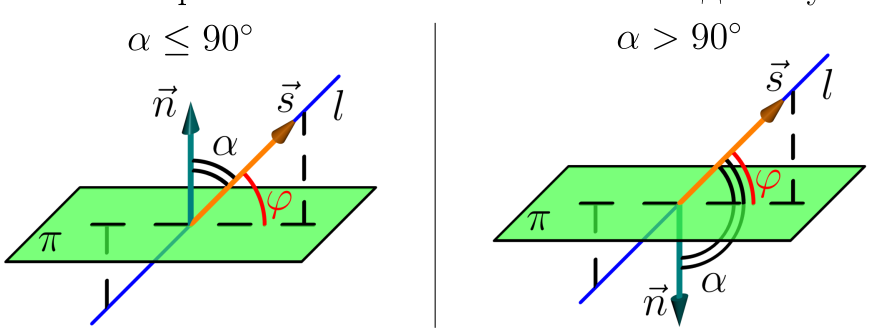
Определение

Углом между прямой и плоскостью называется величина наименьшего из углов, образованных этой прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Обозначение: $(\widehat{l, \pi})$, $(\widehat{\pi, l})$, φ.



Пусть α – угол между направляющим вектором $\vec{s}$ прямой l и нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости π. Возможны два случая:



Отсюда получаем, что

$$\varphi = \begin{cases} 90^\circ - \alpha, & \text{если } \alpha \leq 90^\circ, \\ \alpha - 90^\circ, & \text{если } \alpha > 90^\circ. \end{cases}$$

Тогда
$$\sin\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}.$$

Это есть **формула для вычисления угла между прямой и плоскостью**.

Прямая параллельна плоскости или лежит в ней ($\varphi = 0^\circ$) тогда и только тогда, когда $\vec{s}\perp\vec{n}$.

Прямая перпендикулярна плоскости ($\varphi = 90^\circ$) тогда и только тогда, когда $\vec{s}||\vec{n}$.

Для нахождения **точки пересечения прямой l и плоскости** π удобно от канонических уравнений прямой l перейти к параметрическим. Подставив эти выражения для x, y и z в общее уравнение плоскости π, найдем значение параметра t, при котором прямая l и плоскость π пересекаются:
$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bp + Cq}\ .$$

Затем подставим найденное значение t в параметрические уравнения прямой l и найдем координаты точки пересечения.

Одновременное выполнение равенств
$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bp + Cq = 0 \end{cases}$$
является **условием принадлежности прямой l плоскости** π.

Если прямая l и плоскость π пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Если же они параллельны, то **расстояние от прямой до плоскости** есть расстояние от любой точки прямой до плоскости и может быть найдено по соответствующей формуле.