Аналитическая геометрия
Модуль 2

Аналитическая геометрия
на плоскости и в пространстве.
Комплексные числа и многочлены

Текст 2.1

(для ГУИМЦ, 2023)

Аннотация

Декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Координаты точки и приложения метода координат. Прямая на плоскости: различные виды уравнения прямой, взаимное расположение двух прямых, расстояние от точки до прямой, угол между прямыми.

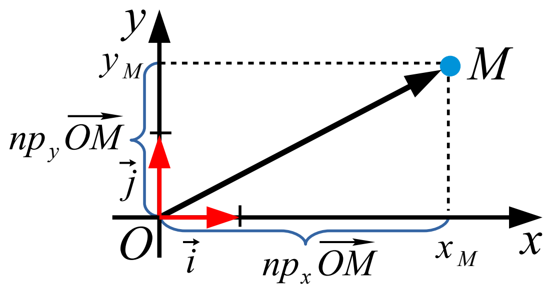
1 Декартова прямоугольная система координат

На плоскости **декартова прямоугольная система координат** Oxy задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Эти прямые называются **осями координат**, точка их пересечения O – **началом координат**. Горизонтальную ось называют **осью абсцисс** (ось Ox), вертикальную – **осью ординат** (ось Oy). Единичные векторы осей обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Выберем на плоскости произвольную точку M и из начала координат O заданной системы координат Oxy проведем вектор $\overrightarrow{OM}$, называемый **радиус-вектором** точки M. Положение точки M на плоскости однозначно определяется заданием двух чисел x_M и y_M, которые называются **координатами точки** M в системе координат

Oxy и которые полагаются равными проекциям вектора $\overrightarrow{OM}$ на оси Ox и Oy, соответственно, или, что то же самое, координатам вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$.

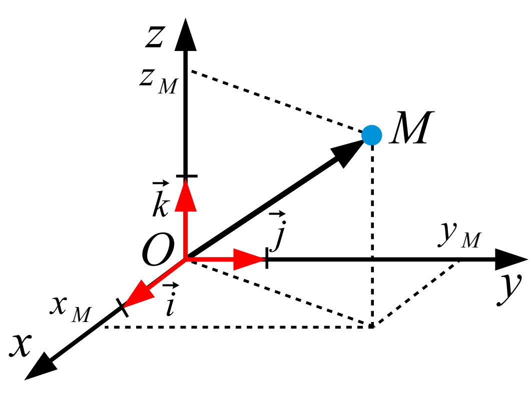
Обозначение: $M(x_M, y_M)$ – точка M с координатами x_M и y_M. Число x_M называется **абсциссой точки** M, а число y_M – **ординатой точки** M.



В пространстве декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ задается тремя взаимно перпендикулярными осями: **осью абсцисс** (ось Ox), **осью ординат** (ось Oy) и **осью аппликат** (ось Oz). Единичные векторы осей – $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Положение точки M в пространстве задается тремя координатами - абсциссой x_M, ординатой y_M и аппликатой z_M, которые полагаются равными проекциям радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz, соответственно, или, что то же самое, координатам вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Обозначение: $M(x_M, y_M, z_M)$ – точка M с координатами x_M, y_M и z_M.



Рассмотрим некоторые приложения метода координат:

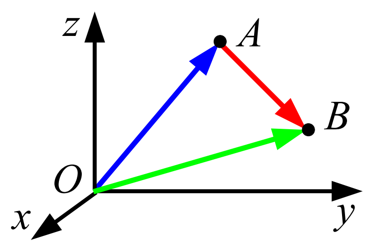
1. Связь координат вектора с координатами его начала и конца

Пусть даны координаты точек $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Радиус-векторы этих точек по определению имеют такие же координаты:

$$\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A, z_A),\ \overrightarrow{OB} = (x_B, y_B, z_B).$$

Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$



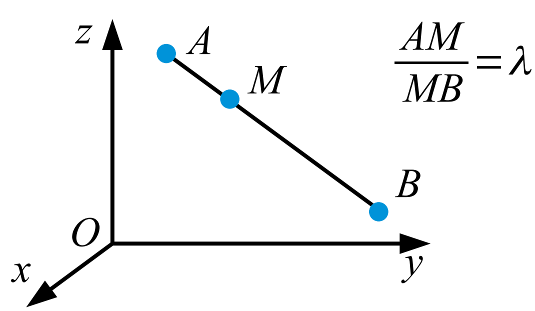
2. Расстояние между двумя точками (длина отрезка)

Расстояние d между двумя точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ равно длине вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

3. Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Найдем координаты точки $M(x_M, y_M, z_M)$ отрезка AB при условии $AM/MB = \lambda$.



Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) \text{ и } \overrightarrow{MB} = (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M).$$

Данные векторы коллинеарны, т.к. лежат на одном отрезке AB, и при этом сонаправленны. Поскольку $AM/MB = \lambda$, то $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} = (\lambda + 1) \cdot \overrightarrow{MB}$$

или в координатной форме

$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (\lambda + 1) \cdot (x_B - x_M, y_B - y_M, z_B - z_M)$.

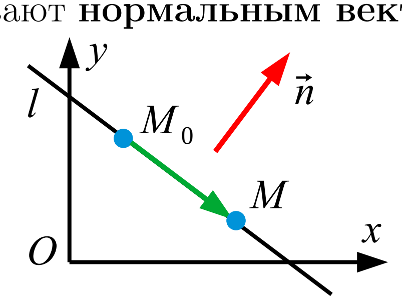
Приравнивая соответствующие координаты векторов слева и справа получившегося равенства и выражая x_M, y_M, z_M, получим

$$x_M = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda}, y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda}, z_M = \frac{z_A + \lambda \cdot z_B}{1 + \lambda}.$$

2 Прямая линия на плоскости

2.1 Уравнение прямой с заданным нормальным вектором

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую l. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на l, а ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен l. Вектор $\vec{n}$ называют **нормальным вектором прямой** l.



Точка $M(x, y)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ ортогонален вектору $\vec{n}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = (x - x_0, y - y_0) \cdot (A, B) = 0.$$

Отсюда получаем **уравнение прямой с заданным нормальным вектором**:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0.$$

2.2 Общее уравнение прямой

Если в уравнении прямой с заданным нормальным вектором раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то можно получить **общее уравнение прямой**:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A и B – координаты нормального вектора $\vec{n}$, а величина C определяется выбором точки M_0.

Некоторые *частные случаи* общего уравнения прямой:

1) если $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то получается прямая $y = -C/B$, параллельная оси Ox;

2) если $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, то получается прямая $x = -C/A$, параллельная оси Oy;

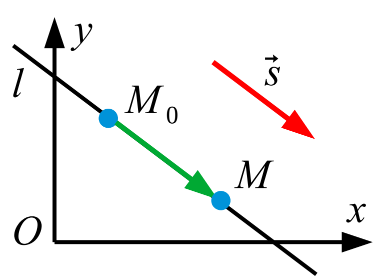
3) если $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, то прямая $Ax + By = 0$ проходит через начало координат;

4) если $A = 0$, $C = 0$, $B \neq 0$, то получаем уравнение оси Ox;

5) если $B = 0$, $C = 0$, $A \neq 0$, то получаем уравнение оси Oy.

2.3 Каноническое уравнение прямой

Рассмотрим на плоскости произвольную прямую l. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит l, а ненулевой вектор $\vec{s} = (m, p)$ параллелен этой прямой или лежит на ней. Вектор $\vec{s}$ называют **направляющим вектором прямой** l.



Точка $M(x, y)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ коллинеарен вектору $\vec{s}$. Следовательно, координаты этих векторов должны быть пропорциональны, что дает **каноническое уравнение прямой**:

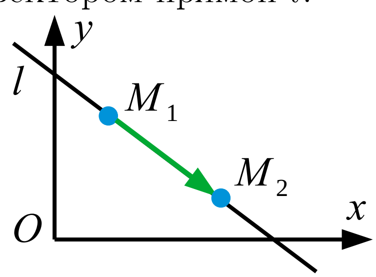
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}.$$

2.4 Уравнение прямой, проходящей через две точки

Рассмотрим на плоскости прямую l, проходящую через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Тогда вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (\underbrace{x_2 - x_1}_{m}, \underbrace{y_2 - y_1}_{p})$$

будет направляющим вектором прямой l.



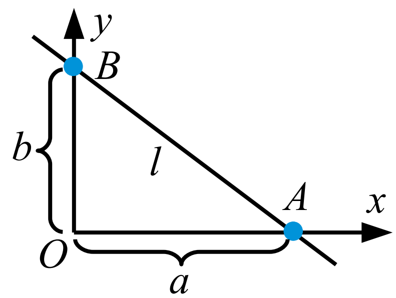
Взяв в каноническом уравнении прямой в качестве точки M_0 данную точку M_1 и положив $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$, получим **уравнение прямой, проходящей через две точки**:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

2.5 Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая l проходит через точки $A(a, 0)$ и $B(0, b)$, являющиеся точками пересечения прямой l с осями координат. По этим точкам составим уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}.$$



Откуда получаем **уравнение прямой в отрезках**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Числа a и b по абсолютной величине равны длинам отрезков OA и OB, отсекаемых прямой l на осях Ox и Oy. Они берутся со знаком “плюс”, если соответствующие отрезки откладываются в положительном направлении осей и со знаком “минус”, если отрезки откладываются в отрицательном направлении. Определенные таким образом числа a и b называют **величинами отрезков** OA и OB.

2.6 Параметрические уравнения прямой

Приравняем каноническое уравнение прямой к некоторому параметру $t \in R$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = t,$$

и представим получившееся двойное равенство в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} (x - x_0)/m = t, \\ (y - y_0)/p = t. \end{cases}$$

Откуда получаем **параметрические уравнения прямой**:

а) *в координатной форме*

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + pt, \end{cases}$$

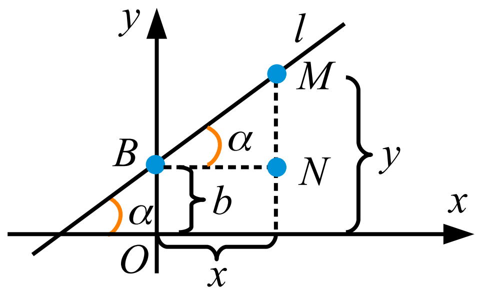
б) *в векторной форме*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t,$$

где $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{s} = (m, p)$.

2.7 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая l пересекает ось Oy в точке $B(0, b)$ и образует с осью Ox угол α.



Выберем на этой прямой произвольную точку $M(x, y)$. Тогда из прямоугольного треугольника MBN найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y-b}{x}.$$

Выражая из этого равенства y, получим **уравнение прямой с угловым коэффициентом**

$$y = kx + b,$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ - **угловой коэффициент прямой**.

3 Расстояние от точки до прямой на плоскости

Пусть прямая l задана своим общим уравнением

$$Ax + By + C = 0$$

и точка $M(x_M, y_M)$ не лежит на прямой l. Найдем расстояние d от точки M до прямой l.

Определение

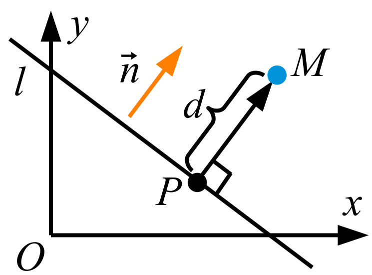
Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.

Пусть $P(x_P, y_P)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l. Тогда вектор $\overrightarrow{PM} = (x_M - x_P, y_M - y_P)$ будет коллинеарен вектору нормали $\vec{n} = (A, B)$ прямой l. Следовательно,

$$(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{PM}}) = 0^\circ \text{ или } (\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{PM}}) = 180^\circ,$$

причем

$$|\overrightarrow{PM}| = d.$$



Рассмотрим модуль скалярного произведения:

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PM}| = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PM}| \cdot |\cos(\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{PM}})| = |\vec{n}| \cdot d \cdot 1.$$

Отсюда

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PM}|}{|\vec{n}|}.$$

Так как $P(x_P, y_P) \in l$, то координаты точки P должны удовлетворять общему уравнению прямой l: $A \cdot x_P + B \cdot y_P + C = 0$. Поэтому

$$A \cdot x_P + B \cdot y_P = -C$$

и

$$\begin{gathered}\vec{n} \cdot \overrightarrow{PM} = (A, B) \cdot (x_M - x_P, y_M - y_P) = \\ = A \cdot (x_M - x_P) + B \cdot (y_M - y_P) = \\ = A \cdot x_M + B \cdot y_M - (A \cdot x_P + B \cdot y_P) = A \cdot x_M + B \cdot y_M + C.\end{gathered}$$

Тогда **расстояние от точки до прямой на плоскости** вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|A \cdot x_M + B \cdot y_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

4 Взаимное расположение двух прямых на плоскости

На плоскости две прямые могут
(1) совпадать, (2) быть параллельными, (3) пересекаться.

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы своими общими уравнениями:
$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$
Тогда

а) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают;

б) если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые параллельны;

в) если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются в точке, координаты которой находятся из системы уравнений
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

В рамках каждого из указанных случаев положение одной прямой относительно другой характеризуется с помощью угла, при этом **угол между совпадающими** и **параллельными прямыми** всегда полагается равным нулю.

Определение

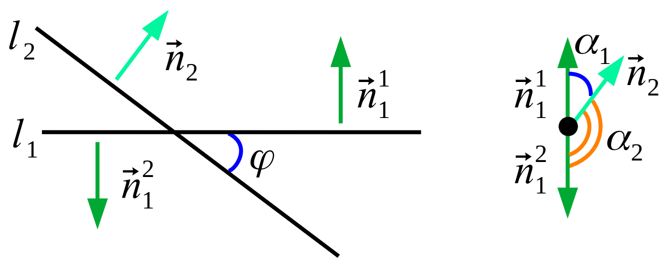
Углом между двумя пересекающимися прямыми называется величина наименьшего из углов, образованных этими прямыми.

Пусть угол между прямыми l_1 и l_2 равен φ, а угол между нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ этих же прямых есть α. Тогда
$$\varphi = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \le 90^\circ \\ 180^\circ - \alpha, \text{ если } \alpha > 90^\circ. \end{cases}$$

Поэтому

$$\cos\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Эта формула однозначно задает угол между прямыми при любом их взаимном расположении, а также при любом выборе нормальных векторов к ним. Например, на рисунке ниже для прямой l_1 указаны два нормальных вектора $\vec{n}_1^1$ и $\vec{n}_1^2$. Для обоих векторов данная формула даст один и тот же угол φ, несмотря на то, что эти векторы расположены под разными углами α_1 и α_2 относительно вектора $\vec{n}_2$.



Условие параллельности или совпадения прямых:

$$l_1 || l_2 \text{ или } l_1 = l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 || \vec{n}_2.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2.$$

Пусть две прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами:

$$l_1 : y = k_1 x + b_1 \text{ и } l_2 : y = k_2 x + b_2.$$

Тогда тангенс угла φ между прямыми l_1 и l_2 можно вычислить по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Условие параллельности или совпадения прямых:

$$l_1 || l_2 \text{ или } l_1 = l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1.$$