

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра.

Векторная алгебра

Текст 1.4

Аннотация

Базис, виды базисов. Координаты вектора в произвольном базисе. Ортогональная проекция вектора на ось и ее свойства. Координаты вектора в ортонормированном базисе и их свойства. Действия над векторами, заданными своими координатами. Скалярное произведение и его приложения.

1 Базис

Определение

Базисом заданного множества векторов называется любая упорядоченная совокупность линейно независимых векторов этого множества, обладающая тем свойством, что любой вектор этого множества можно представить в виде их линейной комбинации.

Базис на плоскости образуют любые два линейно независимые вектора, лежащие в этой плоскости.

Базис в пространстве составляют любые три линейно независимые вектора этого пространства.

Из рассмотренных ранее свойств систем линейно зависимых и независимых векторов следует, что любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, а любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

Определение

Базис называется **ортогональным**, если он состоит из попарно ортогональных векторов. Базис называется **ортонормированным**, если он состоит из попарно ортогональных единичных векторов.

Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис в пространстве. Тогда любой вектор \vec{x} данного пространства можно представить в виде линейной комбинации этих векторов

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3.$$

Такое представление вектора \vec{x} называется **разложением вектора \vec{x} в базисе $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$** , а числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются **координатами вектора \vec{x} в этом базисе**.

2 Ортогональная проекция вектора на ось

Определение

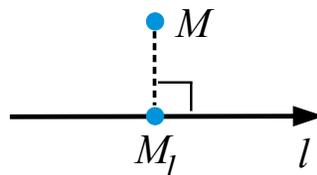
Осью называется прямая с указанными на ней направлением, началом отсчета O и выбранной масштабной единицей.

Обозначение: l .

*Определение*

Ортогональной проекцией (или просто **проекцией**) точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1 , опущенного из точки M на эту ось.

Обозначение: $\text{пр}_l M$.

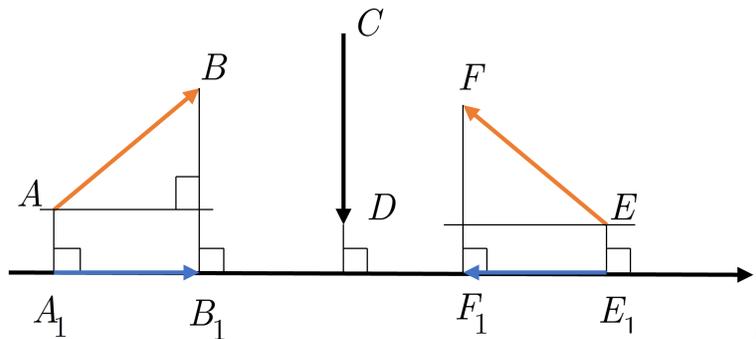


Пусть задан вектор \overrightarrow{AB} и пусть A_1 - проекция точки A , B_1 - проекция точки B на ось l .

Определение

Ортогональной проекцией (или просто **проекцией**) вектора \overrightarrow{AB} на ось l называется положительное число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены.

Обозначение: $\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$



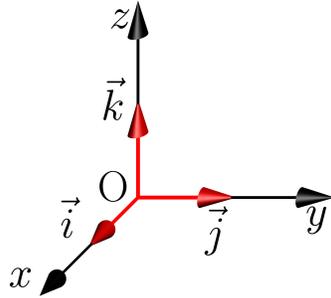
На рисунке $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A_1B_1}|$, $\text{пр}_l \overrightarrow{CD} = 0$, $\text{пр}_l \overrightarrow{EF} = -|\overrightarrow{E_1F_1}|$.

Основные свойства проекций:

1. $\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a} l})$.
2. $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}$.
3. $\text{пр}_l(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_l \vec{a}$, $\alpha \in R$.

3 Координаты вектора в ортонормированном базисе

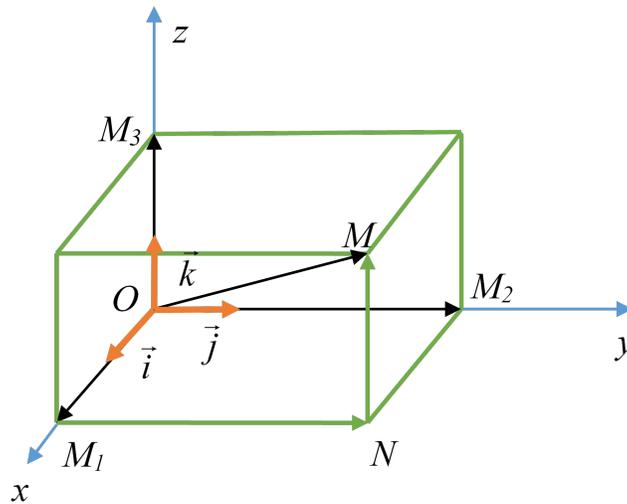
Любая декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ определяется в пространстве заданием ортонормированного базиса и точки приложения векторов этого базиса (точки O). В этом случае базис называют **декартовым прямоугольным базисом**, а его векторы обозначаются как \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , причем $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$.



Зафиксируем в пространстве некоторую декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$ и соответствующий ей ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Далее выберем произвольную точку M и построим вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Проведем через точку M плоскости, параллельные координатным плоскостям. Эти плоскости пересекают оси Ox, Oy, Oz в точках M_1, M_2 и M_3 . Тогда по определению проекции вектора на ось имеем:

$$\text{пр}_x \vec{a} = |\overrightarrow{OM_1}|, \text{пр}_y \vec{a} = |\overrightarrow{OM_2}|, \text{пр}_z \vec{a} = |\overrightarrow{OM_3}|,$$

где $\text{пр}_x \vec{a}$, $\text{пр}_y \vec{a}$, $\text{пр}_z \vec{a}$ - проекции вектора \vec{a} на оси Ox, Oy, Oz , соответственно.



По определению суммы нескольких векторов находим:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}.$$

Т.к.

$$\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2}, \quad \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3},$$

то

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_1} &= |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i} = \text{пр}_x \vec{a} \cdot \vec{i}, \\ \overrightarrow{OM_2} &= |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j} = \text{пр}_y \vec{a} \cdot \vec{j}, \\ \overrightarrow{OM_3} &= |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k} = \text{пр}_z \vec{a} \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$a_x = \text{пр}_x \vec{a}, \quad a_y = \text{пр}_y \vec{a}, \quad a_z = \text{пр}_z \vec{a}.$$

Тогда получаем **разложение вектора \vec{a} в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$** или, что то же самое, **по ортам координатных осей Ox, Oy и Oz** :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z - координаты вектора \vec{a} в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Геометрически эти координаты есть проекции вектора \vec{a} на оси координат Ox, Oy и Oz , соответственно.

Разложение вектора \vec{a} в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ кратко можно записать в виде

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Замечание

Указанная краткая форма записи разложения вектора используется **только** для базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Из теоремы о диагонали прямоугольного параллелепипеда следует:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Отсюда

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пусть углы вектора \vec{a} с осями Ox , Oy , Oz соответственно равны α , β , γ . По определению проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha, a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta, a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma.$$

Откуда

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Определение

Величины $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора \vec{a} , а углы α , β , γ - **направляющими углами** вектора \vec{a} .

Свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Координаты орта вектора \vec{a} :

$$\vec{a}^0 = \vec{a}/|\vec{a}| = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Действия над векторами в координатной форме:

Пусть даны векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

1. При сложении векторов их одноименные координаты складываются:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

2. При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это число:

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z).$$

3. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z.$$

4. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

5. Координаты вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала. Если даны $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

4 Скалярное произведение векторов

Определение

Скалярным произведением двух ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или (\vec{a}, \vec{b}) .

Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Определение

Величину $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора \vec{a} .

Обозначение: \vec{a}^2 .

Алгебраические свойства скалярного произведения:

1) коммутативный закон

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

2) дистрибутивный закон

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},$$

3) ассоциативный закон относительно числового множителя

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), \lambda \in R.$$

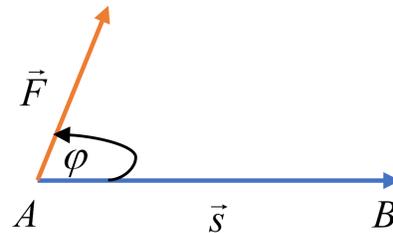
Геометрическое свойство скалярного произведения:

Скалярное произведение двух векторов равняется нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Механический смысл скалярного произведения:

Пусть материальная точка перемещается из положения A в положение B под действием постоянной силы \vec{F} , образующей угол φ с перемещением $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$.



Из физики известно, что работа A постоянной силы \vec{F} при перемещении \vec{s} равна

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi,$$

или

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Таким образом, *механический смысл скалярного произведения* есть работа постоянной силы по перемещению материальной точки.

Теорема (скалярное произведение в координатной форме)

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Приложения скалярного произведения:

1. Угол между векторами.

Угол φ между двумя ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} определяется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

2. Проекция вектора на заданное направление.

Учитывая определение проекции вектора на ось, формулу скалярного произведения векторов можно записать в виде:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a},$$

где $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ – проекция вектора \vec{a} на направление, задаваемое вектором \vec{b} , или, другими словами, на ось, сонаправленную с вектором \vec{b} .

Следовательно, например, проекция вектора \vec{a} на направление, задаваемое вектором \vec{b} , может быть вычислена по формуле:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

3. Модуль вектора.

Модуль вектора \vec{a} можно вычислить с помощью скалярного квадрата по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Примеры:

I. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин $A(-4; -4; 4)$, $B(-3; 2; 2)$, $C(2; 5; 1)$, $D(3; -2; 2)$ взаимно перпендикулярны.

Решение.

Составим векторы, лежащие на диагоналях четырехугольника $ABCD$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= (2 - (-4); 5 - (-4); 1 - 4) = (6; 9; -3), \\ \overrightarrow{BD} &= (3 - (-3); -2 - 2; 2 - 2) = (6; -4; 0).\end{aligned}$$

Найдем их скалярное произведение:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (6; 9; -3) \cdot (6; -4; 0) = 6 \cdot 6 + 9 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, из геометрического свойства скалярного произведения делаем вывод, что векторы \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} взаимно ортогональны, а значит, диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны.

II. Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F} = (3; 2; 4)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2; -4; 6)$ в положение $B(4; 2; 7)$. Под каким углом к \overrightarrow{AB} направлена сила \vec{F} ?

Решение.

Найдем вектор

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (4 - 2; 2 - (-4); 7 - 6) = (2; 6; 1),$$

тогда

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 22 \text{ (ед. работы)}$$

и

$$\cos \varphi = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{22}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 6^2 + 1^2}} = \frac{22}{\sqrt{1189}}.$$

Ответ: $A = 22$ ед. работы, $\varphi = \arccos \frac{22}{\sqrt{1189}}$.