

# Аналитическая геометрия

## Модуль 1. Матричная алгебра.

### Векторная алгебра

### Текст 1.1

#### Аннотация

Понятие определителя. Вычисление определителей 1-ого, 2-ого и 3-его порядков. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения элементов квадратной матрицы. Вычисление определителя произвольного порядка путем его разложения по элементам строки или столбца (теорема разложения). Теорема аннулирования.

## 1 Определитель матрицы

Определитель является характеристикой исключительно квадратных матриц.

#### *Определение*

**Определителем квадратной матрицы** называется число, которое ставится в соответствие данной матрице и вычисляется по заданному правилу из ее элементов.

Если  $A = (a_{ij})$  - это квадратная матрица порядка  $n$ , то ее определитель называется **определителем  $n$ -го порядка** и записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Употребляются также следующие обозначения:

$$\det A, \Delta A, |A|.$$

Приведем **правила вычисления определителей** первого, второго и третьего порядков:

1. Определитель первого порядка.

Пусть  $A = (a_{11})$  – матрица первого порядка, состоящая только из одного элемента  $a_{11}$ . Тогда ее определитель полагается равным этому элементу:

$$\det A = a_{11}.$$

*Пример:*

$$A = (3), \det A = 3.$$

2. Определитель второго порядка.

Для матрицы второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

определитель вычисляется как произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

*Пример:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1.$$

3. Определитель третьего порядка.

Для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

определитель вычисляется по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Эта формула может быть получена по **правилу треугольников**, основанному на геометрической интерпретации ее членов:

1. Элементы, произведения которых входят в формулу со знаком «+», образуют главную диагональ и два треугольника, симметричные относительно нее:

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Элементы, произведения которых входят в формулу со знаком «-», располагаются аналогично относительно побочной диагонали:

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 5 \cdot 0 \cdot (-4) = 9.$$

## 2 Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо **ряда** (*строки* или *столбца*) прибавить/вычесть соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha \cdot a_{21} & a_{12} + \alpha \cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} - \beta \cdot a_{11} & a_{22} - \beta \cdot a_{12} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке местами двух параллельных рядов знак определителя меняется на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Если каждый элемент некоторого ряда определителя раскладывается на сумму каких-либо двух слагаемых (для каждого элемента своих), то определитель может быть разложен на сумму двух определителей, у которых в этом ряду в качестве соответствующего элемента стоит только одно из слагаемых, а остальные ряды переходят из исходного определителя без изменений:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Определитель не меняется при транспонировании:

$$\det A = \det A^T.$$

6. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

7. Определитель равен нулю, если он имеет:

- нулевую строку (столбец);
- хотя бы две одинаковые строки (столбца);
- хотя бы две строки (столбца), элементы которых пропорциональны;
- хотя бы одну строку (столбец), являющуюся линейной комбинацией других строк (столбцов).

### 3 Миноры и алгебраические дополнения

*Определение*

**Минором**  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  квадратной матрицы  $A$  называется определитель матрицы, получающейся из данной путем вычеркивания  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца.

*Пример:*

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 1 \cdot 7 = -7$  – минор элемента  $a_{11}$ , полученный путем вычеркивания из матрицы  $A$  первой строки и первого столбца,

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 0 \cdot (-2) = 7$  – минор элемента  $a_{32}$ , полученный путем вычеркивания из матрицы  $A$  третьей строки и второго столбца.

*Определение*

**Алгебраическим дополнением**  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  квадратной матрицы  $A$  называется число, равное  $(-1)^{i+j} M_{ij}$ .

*Пример:*

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1.$$

## 4 Вычисление определителя произвольного порядка

*Теорема (теорема разложения определителя по элементам какого-либо ряда)*

Определитель квадратной матрицы произвольного порядка равен сумме произведений элементов какого-либо ряда данной матрицы на их алгебраические дополнения.

*Пример:* Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель с помощью разложения по элементам второй строки, содержащей один нулевой элемент ( $a_{22} = 0$ ), поскольку при этом нет необходимости находить алгебраическое дополнение  $A_{22}$ , так как  $a_{22} \cdot A_{22} = 0$  при любом значении  $A_{22}$ . Итак,

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + (-4) \cdot A_{23} = \\ &= 1 \cdot A_{21} + 0 + (-4) \cdot A_{23}, \end{aligned}$$

где

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1) = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = -8.$$

Тогда

$$\Delta = 1 \cdot 2 + 0 + (-4) \cdot (-8) = 34.$$

*Замечание*

Эта теорема позволяет свести вычисление определителя  $n$ -го порядка к определителю порядка  $(n - 1)$ . В целом громоздкая процедура, однако ее можно заметно упростить, если воспользоваться свойствами определителя, например, свойством 1, которое позволяет обнулить значительную часть элементов какого-либо ряда. В этом случае исчезает необходимость считать существенную часть алгебраических дополнений, соответствующих нулевым элементам.

*Пример:* Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем определитель так, чтобы три из четырех элементов какой-либо строки или столбца стали равными нулю. Для этого воспользуемся свойством 1. Его особенно удобно применять, если в определителе существует элемент, равный  $\pm 1$ . Выберем в качестве такого элемента  $a_{13} = 1$  и с его помощью обратим все остальные элементы 3-го столбца в нули. С этой целью:

- а) к элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки;
- б) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки, умноженные на 2;
- в) из элементов 4-й строки вычтем элементы 1-й строки.

Отметим, что согласно свойствам определителя преобразования (а)-(в) не изменяют значение определителя.

Тогда получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по 3-му столбцу. В этом случае нам достаточно посчитать только одно алгебраическое дополнение  $A_{13}$ , поскольку все остальные элементы 3-его столбца равны нулю, а произведение любого числа на нуль есть нуль.

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} = 1 \cdot A_{13} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Вычтем из элементов 1-й строки нового определителя удвоенные элементы 2-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

и разложим получившийся определитель по 1-й строке:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3) \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = (-3) \cdot A_{11} = \\ &= (-3) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 1 \cdot (0 - 3 \cdot (-1)) = -9.\end{aligned}$$

### *Замечание*

Определитель треугольной матрицы любого порядка равен произведению элементов главной диагонали.

### *Пример:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-3) \cdot 2 = -72.$$

В дальнейшем нам понадобится еще одна теорема.

### *Теорема (теорема аннулирования)*

Сумма произведений элементов какого-либо ряда квадратной матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов любого параллельного ряда этой же матрицы равна нулю.



*Пример:* Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем сумму произведений элементов первой строки матрицы на алгебраические дополнения элементов второй строки:

$$(-3) \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 5 \cdot A_{23} =$$

$$= (-3) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot (-1) \cdot (-15) + 1 \cdot 1 \cdot (-5) + 5 \cdot (-1) \cdot (-10) = -45 - 5 + 50 = 0.$$