Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Высшая математика» (ФН-1)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Модуль 1

Решение типовых заданий рубежного контроля по векторной алгебре

Методические указания

1. Разные преподаватели предъявляют различные требования к оформлению решения. Поэтому на рубежном контроле необходимо, опираясь на приведенные здесь примеры, оформлять свое решение в соответствии с требованиями преподавателя, выдавшего это задание.

2. Для каждого задания приводится ссылка на используемый теоретический материал (лекции и тексты). Каждое решение излагается в предположении, что этот материал уже знаком студенту. Поэтому перед разбором соответствующего решения необходимо подробно с ним ознакомиться.

Задание 1. Упростить $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}\times(\vec{c}-3\vec{a}))+((\vec{b}-\vec{c})\times\vec{b})\cdot\vec{a}-3\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$.

Решение. Используем материалы текста 1.4 и лекции 1.5.

Воспользуемся алгебраическими свойствами скалярного, векторного и смешанного произведений:

$$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{c}\times(\vec{c}-3\vec{a}))+((\vec{b}-\vec{c})\times\vec{b})\cdot\vec{a}-3\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=$$

$$=\vec{a}\cdot\underset{=\vec{0}}{(\vec{c}\times\vec{c})}-3\underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}_{\substack{-(\vec{a}\times\vec{a})\cdot\vec{c}\\ =0}}+2\vec{b}\cdot\underset{=\vec{0}}{(\vec{c}\times\vec{c})}-6\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+\underset{=\vec{0}}{(\vec{b}\times\vec{b})}\cdot\vec{a}-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}-3\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=$$

(заметим, что $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=-\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=-(\vec{a}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$ и, согласно геометрическому свойству, следующие векторные произведения есть нулевые векторы:

$\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}$, $\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$)

$$= -6\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) - \underbrace{(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})} - 3\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} =$$

(в первом слагаемом поменяем знаки векторного и скалярного произведений, а ко второму и третьему применим коммутативный закон скалярного произведения)

$$= -6\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} - \underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})}_{=-\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})} - 3\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) =$$

(к первому слагаемому применим коммутативный закон скалярного произведения, а ко второму – антикоммутативный закон векторного произведения)

$$= -6\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) - 3\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -8\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -8\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,.$$

Ответ: $-8\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Задание 2. Найти длину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Используем материал текста 1.4.

Воспользуемся свойствами скалярного произведения:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^{\,2} - 24\vec{a}\vec{b} + 16\vec{b}^{\,2}} =$$

$$= \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 24|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) + 16|\vec{b}|^2} = \sqrt{9\cdot 2^2 - 24\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + 16\cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\,.$$

Ответ: $|\vec{c}| = 6\sqrt{3}.$

Задание 3. В параллелограмме $ABCD$ найти длину его диагонали BD, если известно, что $\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \dfrac{\vec{b}}{3}$, $|\vec{a}| = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. Используем материалы лекции 1.4 и текста 1.4.

Сделаем чертеж к задаче (рис. 1).

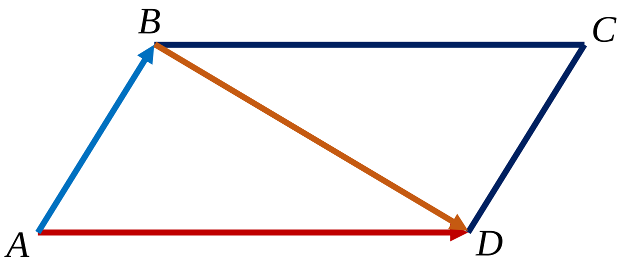

Рис. 1. Чертеж к заданию 3.

Параллелограмм $ABCD$ построен на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Длина его диагонали BD есть модуль вектора $\overrightarrow{BD}$, который равен разности векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{\vec{b}}{3} - \left(\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b}\right) = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}.$$

Тогда, используя свойства скалярного произведения, получим результат:

$$BD = |\overrightarrow{BD}| = \left|-\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\vec{a}^2 + 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\vec{a}\cdot\frac{4}{3}\vec{b} + \frac{16}{9}\vec{b}^2\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}) + \frac{16}{9}|\vec{b}|^2} = \sqrt{\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{18} - 4\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{16}{9}\cdot 1} = \frac{\sqrt{89}}{6\sqrt{2}}$$

Ответ: $BD = \dfrac{\sqrt{89}}{6\sqrt{2}}$

Задание 4. На векторах $\vec{a} = (2;\ -3;\ 0)$ и $\vec{b} = (1;\ 7;\ 5)$ построен параллелограмм. Найти длину его высоты, опущенную на основание $\vec{a}$.

Решение. Используем материал лекции 1.5.

Сделаем чертеж к задаче (рис. 2).

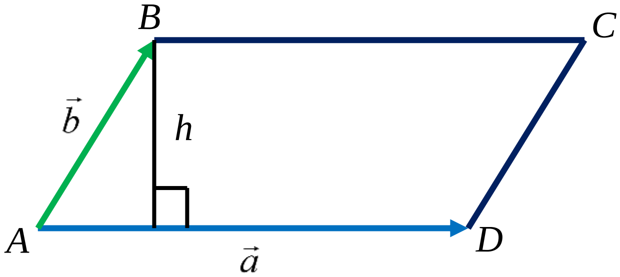

Рис. 2. Чертеж к заданию 4.

Для вычисления площади параллелограмма и его высоты воспользуемся формулами:

$$S_{\text{пар.}} = |\vec{a}\times\vec{b}|,\ h = \frac{S_{\text{пар.}}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

1) Найдем векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}\vec{k} = -15\vec{i} - 10\vec{j} + 17\vec{k} = (-15;\ -10;\ 17)$$

2) Вычислим модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-15)^2 + (-10)^2 + 17^2} = \sqrt{614}.$$

3) $S_{\text{пар}} = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{614}$ (кв. ед).

4) Найдем длину вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13}.$$

5) Вычислим длину высоты параллелограмма, опущенную на основание:

$$h = \frac{S_{\text{пар}}}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{614}}{\sqrt{13}}.$$

Ответ: $h = \dfrac{\sqrt{614}}{\sqrt{13}}$ (ед).

Задание 5. Векторы $\vec{a} = l\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{k}$ компланарны. Найти l.

Решение. Используем материал лекции 1.5.

Координаты векторов: $\vec{a} = (l;\ -4;\ 6)$, $\vec{b} = (0;\ 1;\ 1)$, $\vec{c} = (1;\ 0;\ 4)$.

Из геометрического свойства смешанного произведения следует, что

$$\text{векторы } \vec{a},\ \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны} \Leftrightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0.$$

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} l & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4l - 4 - 6 = 4l - 10.$$

Воспользуемся условием компланарности:

$$4l - 10 = 0 \Leftrightarrow l = 2{,}5.$$

Ответ: при $l = 2{,}5$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Задание 6. Найти объем пирамиды, если заданы ее вершины: $A(1;\ -1;\ -1)$, $B(0;\ 5;\ 4)$, $C(2;\ -3;\ -4)$, $D(5;\ -4;\ -6)$.

Решение. Используем материал лекции 1.5.

Сделаем чертеж к задаче (рис. 3).

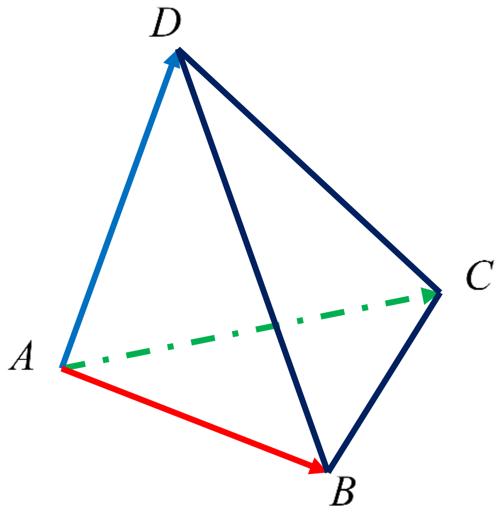

Рис. 3. Чертеж к заданию 6.

Пирамида построена на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Тогда объем пирамиды вычислим по формуле:

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}|.$$

1) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (0-1;\ 5-(-1);\ 4-(-1)) = (-1;\ 6;\ 5),$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-1; -3-(-1); -4-(-1)) = (1;\ -2;\ -3),$$

$$\overrightarrow{AD} = (5-1;\ -4-(-1);\ -6-(-1)) = (4;\ -3;\ -5).$$

2) Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -18.$$

Тогда объем параллелепипеда, построенного на трех рассматриваемых векторах, равен

$$V_{\text{пар.}} = |-18| = 18 \text{ куб. ед.},$$

а искомый объем треугольной пирамиды $ABCD$ равен

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3 \text{ куб. ед.}$$

Ответ: $V_{\text{пир}}$=3 куб. ед.

Задание 7. Даны векторы $\vec{a} = (3; 2; -1)$, $\vec{b} = (1; 4; 3)$, $\vec{c} = (2; -2; 1)$, $\vec{d} = (-1; -6; -2)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение. Используем материал лекции 1.3, текста 1.4 и лекции 1.5.

Базис в пространстве составляют любые три линейно независимые вектора этого пространства. Такими являются векторы, не лежащие в одной плоскости, т.е. некомпланарные. Компланарность векторов можно установить с помощью смешанного произведения.

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 50 \neq 0,$$

следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не лежат в одной плоскости, следовательно, могут образовывать базис в пространстве. И значит вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде линейной комбинации этих трех векторов:

$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c},$$

где x, y, z – коэффициенты разложения – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Вычислим x, y, z.

Перейдем к матричной форме записи:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными, решив которую найдем искомые координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = -1, \\ 2x + 4y - 2z = -6, \\ -x + 3y + z = -2. \end{cases}$$

Для решения системы можно воспользоваться формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Здесь определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 50.$$

Вычислим определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3, заменяя в определителе Δ первый, второй и третий столбцы соответственно столбцом свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -20, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -50, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 30.$$

Тогда решение системы:

$$x = \frac{-20}{50} = -0,4,\ y = \frac{-50}{50} = -1,\ z = \frac{30}{50} = 0,6.$$

Ответ: $\vec{d} = -0,4\vec{a} - \vec{b} + 0,6\vec{c}$.