

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана  
Факультет "Фундаментальные науки"  
Кафедра "Высшая математика"

Аналитическая геометрия  
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра  
Лекция 1.5

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.



# Векторное произведение векторов



# Векторное произведение векторов

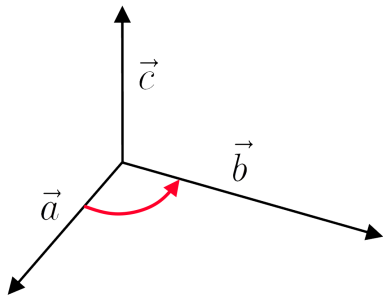
## Определение

Три некопланарных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора  $\vec{c}$  кратчайший поворот от первого вектора  $\vec{a}$  ко второму вектору  $\vec{b}$  виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.

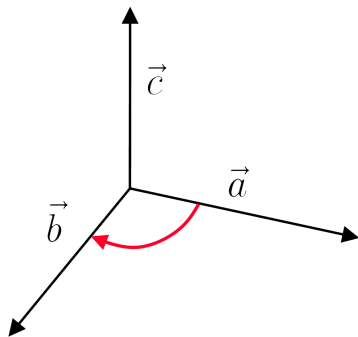


# Векторное произведение векторов

Правая тройка



Левая тройка



# Векторное произведение векторов

Так как три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве, то все базисы в пространстве делятся на два класса:



# Векторное произведение векторов

Так как три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве, то все базисы в пространстве делятся на два класса:

- (1) **класс правых базисов,**
- (2) **класс левых базисов.**



# Векторное произведение векторов

Так как три некопланарных вектора образуют базис в пространстве, то все базисы в пространстве делятся на два класса:

- (1) **класс правых базисов,**
- (2) **класс левых базисов.**

Класс, к которому относится фиксированный базис, определяет его **ориентацию**.



# Векторное произведение векторов

*Определение*

**Векторным произведением** вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который удовлетворяет условиям:





# Векторное произведение векторов

## Определение

**Векторным произведением** вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который удовлетворяет условиям:

1)  $\vec{c} \perp \vec{a}$  и  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;



# Векторное произведение векторов

## Определение

**Векторным произведением** вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который удовлетворяет условиям:

- 1)  $\vec{c} \perp \vec{a}$  и  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;
- 2)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ ;



# Векторное произведение векторов

## Определение

**Векторным произведением** вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который удовлетворяет условиям:

- 1)  $\vec{c} \perp \vec{a}$  и  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;
- 2)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ ;
- 3) векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют правую тройку.



# Векторное произведение векторов

## Определение

**Векторным произведением** вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который удовлетворяет условиям:

- 1)  $\vec{c} \perp \vec{a}$  и  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;
  - 2)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ ;
  - 3) векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют правую тройку.
- Обозначение:  $\vec{a} \times \vec{b}$  или  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .



# Векторное произведение векторов

*Алгебраические свойства:*



# Векторное произведение векторов

*Алгебраические свойства:*

1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$



# Векторное произведение векторов

*Алгебраические свойства:*

1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

2) дистрибутивный закон

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$



# Векторное произведение векторов

*Алгебраические свойства:*

1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

2) дистрибутивный закон

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

3) ассоциативный закон относительно

числового множителя

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \lambda \in R.$$





# Векторное произведение векторов

*Геометрическое свойство:*



# Векторное произведение векторов

*Геометрическое свойство:*

Векторное произведение двух векторов  
равняется нулевому вектору тогда и только  
тогда, когда эти векторы коллинеарны,



# Векторное произведение векторов

*Геометрическое свойство:*

Векторное произведение двух векторов равняется нулевому вектору тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны, т.е.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

=



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}$$





# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$





# Векторное произведение векторов

*Теорема (векторное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы два вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

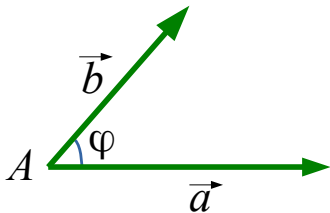
Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

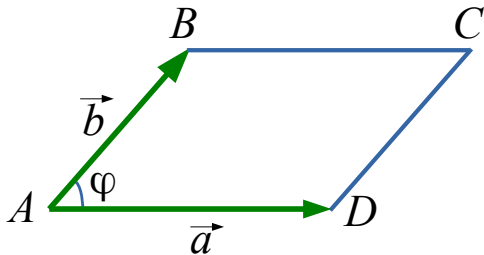
Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

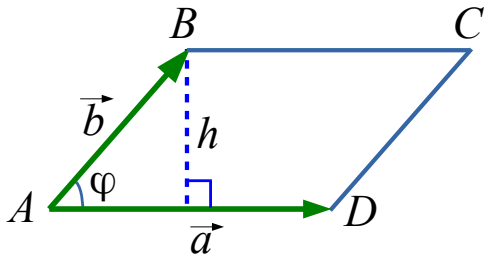
Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

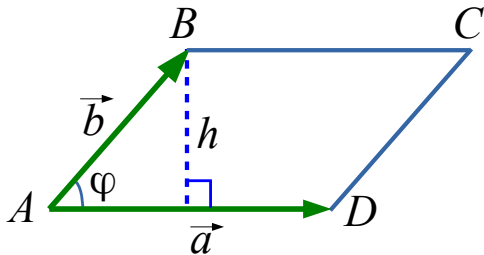
Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



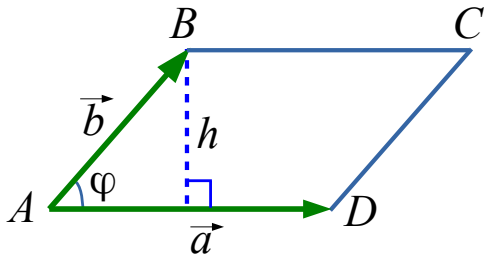
$S_{ABCD}$



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



$$S_{ABCD} = AD \cdot h$$

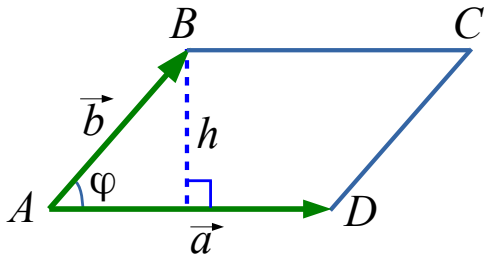




# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



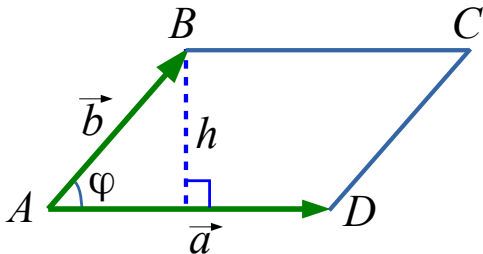
$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin \varphi$$



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



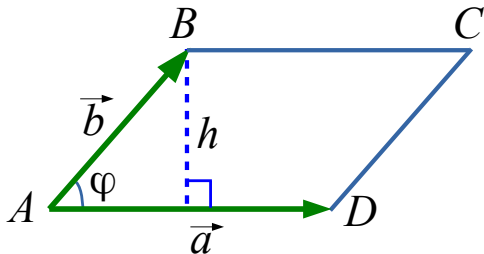
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin \varphi = \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



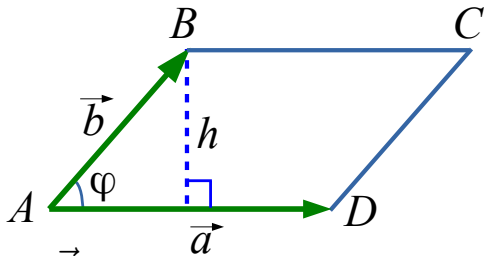
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin \varphi = \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|. \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



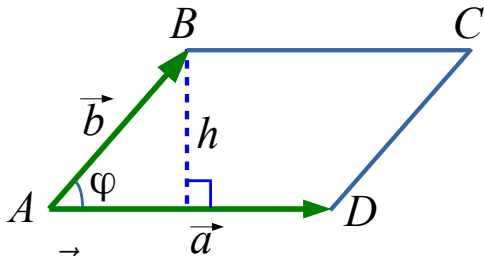
$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

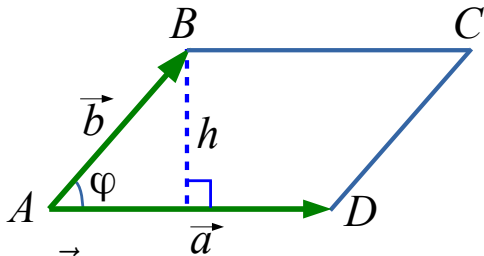
Эта формула задает *геометрический смысл*  
*векторного произведения*



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

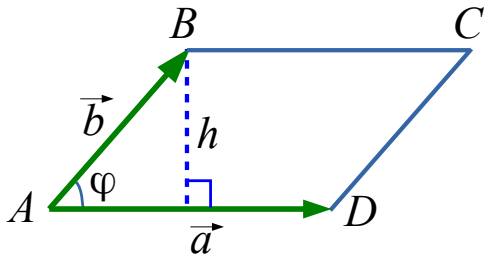
по которому модуль векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  есть площадь параллелограмма, построенного на данных векторах.



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



Высота параллелограмма  $ABCD$  есть

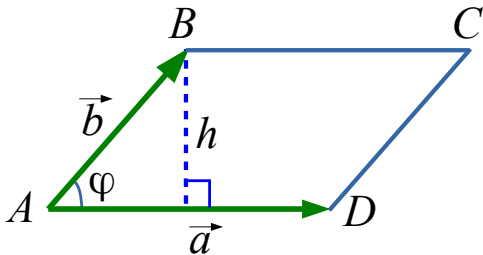
$$h = \frac{S_{ABCD}}{AD}$$



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



Высота параллелограмма  $ABCD$  есть

$$h = \frac{S_{ABCD}}{AD} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}.$$

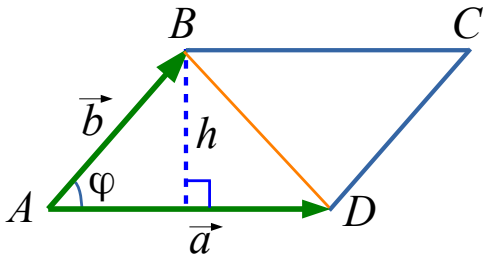




# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



Площадь треугольника  $ABD$  равна половине площади параллелограмма  $ABCD$ :

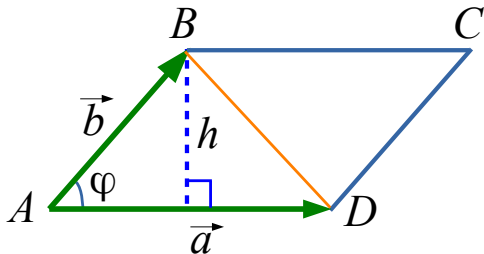
$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$



# Векторное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Построим на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  параллелограмм:



Площадь треугольника  $ABD$  равна половине площади параллелограмма  $ABCD$ :

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



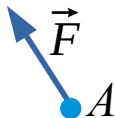
# Векторное произведение векторов

*Механический смысл:*



# Векторное произведение векторов

*Механический смысл:*

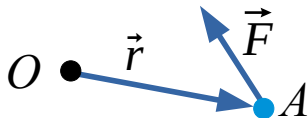


Пусть на частицу  $A$  действует сила  $\vec{F}$ .



# Векторное произведение векторов

*Механический смысл:*

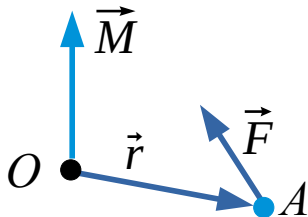


Пусть на частицу  $A$  действует сила  $\vec{F}$ .  
Положение этой частицы в пространстве в каждый момент времени задается ее радиус-вектором  $\vec{r}$  относительно некоторой фиксированной точки  $O$  (полюса).



# Векторное произведение векторов

*Механический смысл:*

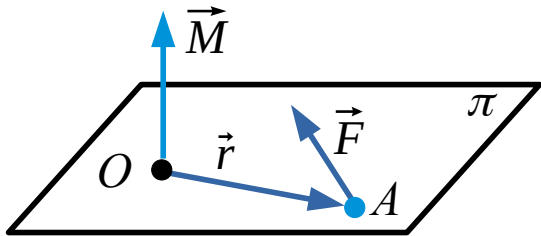


Вектор  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  называется моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$



# Векторное произведение векторов

*Механический смысл:*



Вектор  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  называется моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  и характеризует способность силы вращать частицу  $A$  вокруг точки  $O$  в плоскости  $\pi$ , содержащей точку  $O$  и силу  $\vec{F}$ .



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*





# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

$\triangle ABC$  построен на векторах  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .



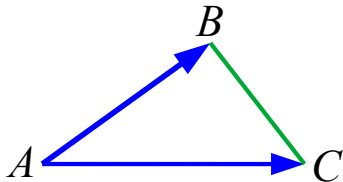
# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

$\triangle ABC$  построен на векторах  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .



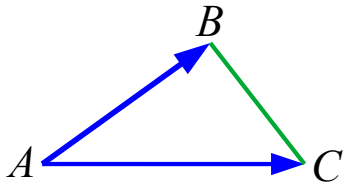
# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

$\triangle ABC$  построен на векторах  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ :



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ :

$\overrightarrow{AB}$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 5; 1 - 2; -2 - (-1))$$





# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 5; 1 - 2; -2 - (-1)) = (-2; -1; -1),$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 5; 1 - 2; -2 - (-1)) = (-2; -1; -1),$$

$$\overrightarrow{AC}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 5; 1 - 2; -2 - (-1)) = (-2; -1; -1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 - 5; -2 - 2; 2 - (-1))$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 5; 1 - 2; -2 - (-1)) = (-2; -1; -1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 - 5; -2 - 2; 2 - (-1)) = (-1; -4; 3).$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*  $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; -4; 3)$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*  $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*  $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$



# Векторное произведение векторов

Примеры:

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$





# Векторное произведение векторов

Примеры:

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\vec{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}\end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*  $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\vec{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*  $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\vec{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$



# Векторное произведение векторов

Примеры:

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$$



# Векторное произведение векторов

Примеры:

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\vec{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned} &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k} \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\vec{AC} = (-1; -4; 3)$

2. Вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned} &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= -7\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k} = (-7; 7; 7). \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

I. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

*Решение.*  $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\vec{AC} = (-1; -4; 3)$   
 $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-7; 7; 7)$





# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; -4; 3)$   
 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-7; 7; 7)$

3. Найдем площадь треугольника:



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\vec{AC} = (-1; -4; 3)$   
 $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-7; 7; 7)$

3. Найдем площадь треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$



# Векторное произведение векторов

Примеры:

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\vec{AC} = (-1; -4; 3)$   
 $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-7; 7; 7)$

3. Найдем площадь треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 7^2}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

1. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(5; 2; -1)$ ,  $B(3; 1; -2)$  и  $C(4; -2; 2)$ .

Решение.  $\vec{AB} = (-2; -1; -1)$ ,  $\vec{AC} = (-1; -4; 3)$   
 $\vec{AB} \times \vec{AC} = (-7; 7; 7)$

3. Найдем площадь треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + 7^2} = \frac{7}{2} \sqrt{3} \text{ (кв. ед).}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти площадь параллелограмма  $ABCD$ , построенного на векторах

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n},$$

где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  - единичные векторы, образующие угол  $30^\circ$ .



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти площадь параллелограмма  $ABCD$ , построенного на векторах

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n},$$

где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  - единичные векторы, образующие угол  $30^\circ$ .

*Решение.*



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти площадь параллелограмма  $ABCD$ , построенного на векторах

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n},$$

где  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$  - единичные векторы, образующие угол  $30^\circ$ .

*Решение.*

Воспользуемся формулой:

$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*





# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

1. Найдем векторное произведение:



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

1. Найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n})$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

1. Найдем векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) = \\ &= 2(\vec{m} \times \vec{m}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\vec{n} \times \vec{m}) + 2(\vec{n} \times \vec{n})\end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

Примеры:

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) = \\ &= 2(\underbrace{\vec{m} \times \vec{m}}_{\vec{0}}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\vec{n} \times \vec{m}) + 2(\vec{n} \times \vec{n})\end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

Примеры:

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) = \\ &= 2(\underbrace{\vec{m} \times \vec{m}}_{\vec{0}}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\vec{n} \times \vec{m}) + 2(\underbrace{\vec{n} \times \vec{n}}_{\vec{0}})\end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

Примеры:

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) = \\ &= 2(\underbrace{\vec{m} \times \vec{m}}_{\vec{0}}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\underbrace{\vec{n} \times \vec{m}}_{-(\vec{m} \times \vec{n})}) + 2(\underbrace{\vec{n} \times \vec{n}}_{\vec{0}})\end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

Примеры:

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) = \\&= 2(\underbrace{\vec{m} \times \vec{m}}_{\vec{0}}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\underbrace{\vec{n} \times \vec{m}}_{-(\vec{m} \times \vec{n})}) + 2(\underbrace{\vec{n} \times \vec{n}}_{\vec{0}}) = \\&= \vec{m} \times \vec{n} - 4(\vec{m} \times \vec{n})\end{aligned}$$





# Векторное произведение векторов

Примеры:

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

Решение.

1. Найдем векторное произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{m} + 2\vec{n}) \times (2\vec{m} + \vec{n}) = \\&= 2(\underbrace{\vec{m} \times \vec{m}}_{\vec{0}}) + \vec{m} \times \vec{n} + 4(\underbrace{\vec{n} \times \vec{m}}_{-(\vec{m} \times \vec{n})}) + 2(\underbrace{\vec{n} \times \vec{n}}_{\vec{0}}) = \\&= \vec{m} \times \vec{n} - 4(\vec{m} \times \vec{n}) = -3(\vec{m} \times \vec{n}).\end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

2. Вычислим модуль векторного произведения:



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |-3(\vec{m} \times \vec{n})|$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |-3(\vec{m} \times \vec{n})| = |-3| \cdot |\vec{m} \times \vec{n}|$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |-3(\vec{m} \times \vec{n})| = |-3| \cdot |\vec{m} \times \vec{n}| = \\ &= 3 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin 30 \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= | - 3(\vec{m} \times \vec{n}) | = | - 3 | \cdot |\vec{m} \times \vec{n}| = \\ &= 3 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin 30 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= |-3(\vec{m} \times \vec{n})| = |-3| \cdot |\vec{m} \times \vec{n}| = \\ &= 3 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin 30 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1,5. \end{aligned}$$





# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= | - 3(\vec{m} \times \vec{n}) | = | - 3 | \cdot |\vec{m} \times \vec{n}| = \\ &= 3 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin 30 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1,5. \end{aligned}$$

3. Найдем площадь параллелограмма:



# Векторное произведение векторов

*Примеры:*

II. Найти ...

$$\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n} \text{ и } \vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$$

*Решение.*

2. Вычислим модуль векторного произведения:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}| &= | - 3(\vec{m} \times \vec{n}) | = | - 3 | \cdot |\vec{m} \times \vec{n}| = \\ &= 3 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin 30 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1,5. \end{aligned}$$

3. Найдем площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = |\vec{a} \times \vec{b}| = 1,5 \text{ (кв.ед).}$$



# Смешанное произведение векторов



# Смешанное произведение векторов

## Определение

Если вектор  $\vec{a}$  векторно умножить на вектор  $\vec{b}$ , а полученный вектор скалярно умножить на вектор  $\vec{c}$ , то получится число, называемое **смешанным произведением** векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .



# Смешанное произведение векторов

## Определение

Если вектор  $\vec{a}$  векторно умножить на вектор  $\vec{b}$ , а полученный вектор скалярно умножить на вектор  $\vec{c}$ , то получится число, называемое **смешанным произведением** векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

Обозначение:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  или  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ .



# Смешанное произведение векторов

*Алгебраические свойства:*



# Смешанное произведение векторов

*Алгебраические свойства:*

1) в смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами,



# Смешанное произведение векторов

*Алгебраические свойства:*

1) в смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$





# Смешанное произведение векторов

*Алгебраические свойства:*

1) в смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

2) дистрибутивный закон

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \vec{b} \vec{c} = \vec{a}_1 \vec{b} \vec{c} + \vec{a}_2 \vec{b} \vec{c},$$



# Смешанное произведение векторов

*Алгебраические свойства:*

1) в смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

2) дистрибутивный закон

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \vec{b} \vec{c} = \vec{a}_1 \vec{b} \vec{c} + \vec{a}_2 \vec{b} \vec{c},$$

3) ассоциативный закон относительно

числового множителя

$$(\lambda \vec{a}) \vec{b} \vec{c} = \vec{a} (\lambda \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{b} (\lambda \vec{c}) = \lambda (\vec{a} \vec{b} \vec{c}), \lambda \in R.$$



# Смешанное произведение векторов

*Геометрическое свойство:*



# Смешанное произведение векторов

*Геометрическое свойство:*

Смешанное произведение трех векторов  
равняется нулю тогда и только тогда, когда  
эти векторы компланарны,



# Смешанное произведение векторов

*Геометрическое свойство:*

Смешанное произведение трех векторов равняется нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$



# Смешанное произведение векторов

*Геометрический смысл:*



# Смешанное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

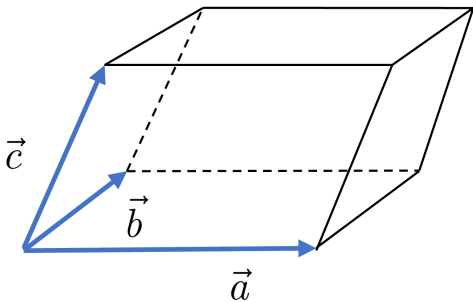
На трех некопланарных векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , выходящих из одной точки, построим параллелепипед.



# Смешанное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

На трех некопланарных векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , выходящих из одной точки, построим параллелепипед.





# Смешанное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , взятому по модулю:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,$$



# Смешанное произведение векторов

*Геометрический смысл:*

Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , взятому по модулю:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, есть

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$



# Смешанное произведение векторов

*Теорема (смешанное произведение в  
координатной форме)*



# Смешанное произведение векторов

*Теорема (смешанное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы три вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$



# Смешанное произведение векторов

*Теорема (смешанное произведение в  
координатной форме)*

Пусть заданы три вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$



# Смешанное произведение векторов

*Приложение смешанного произведения:*



# Смешанное произведение векторов

*Приложение смешанного произведения:*

Взаимная ориентация векторов в пространстве:



# Смешанное произведение векторов

*Приложение смешанного произведения:*

Взаимная ориентация векторов в пространстве:

1) если  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ , то тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$   
правая,





# Смешанное произведение векторов

*Приложение смешанного произведения:*

Взаимная ориентация векторов в пространстве:

- 1) если  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ , то тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$   
правая,
- 2) если  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ , то тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$   
левая.



# Смешанное произведение векторов

*Пример:*



# Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :

$\overrightarrow{M_1M_2}$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3)$$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3) = (1; 2; 1),$$





## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3) = (1; 2; 1),$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}$$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3) = (1; 2; 1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5 - 2; 5 - 5; -1 - 3)$$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3) = (1; 2; 1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5 - 2; 5 - 5; -1 - 3) = (-7; 0; -4),$$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3) = (1; 2; 1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5 - 2; 5 - 5; -1 - 3) = (-7; 0; -4),$$

$$\overrightarrow{M_1M_4}$$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3) = (1; 2; 1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5 - 2; 5 - 5; -1 - 3) = (-7; 0; -4),$$

$$\overrightarrow{M_1M_4} = (-4 - 2; -3 - 5; 0 - 3)$$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

1. Найдем векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$  и  $\overrightarrow{M_1M_4}$ :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3 - 2; 7 - 5; 4 - 3) = (1; 2; 1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (-5 - 2; 5 - 5; -1 - 3) = (-7; 0; -4),$$

$$\overrightarrow{M_1M_4} = (-4 - 2; -3 - 5; 0 - 3) = (-6; -8; -3).$$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= (1; 2; 1), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (-7; 0; -4), \\ \overrightarrow{M_1M_4} &= (-6; -8; -3).\end{aligned}$$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 2; 1), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (-7; 0; -4),$$
$$\overrightarrow{M_1M_4} = (-6; -8; -3).$$

2. Вычислим смешанное произведение этих векторов:





## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 2; 1), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (-7; 0; -4), \\ \overrightarrow{M_1M_4} = (-6; -8; -3).$$

2. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M_4}$$



# Смешанное произведение векторов

Пример:

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

Решение.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 2; 1), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (-7; 0; -4), \\ \overrightarrow{M_1M_4} = (-6; -8; -3).$$

2. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix}$$



# Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 2; 1), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (-7; 0; -4), \\ \overrightarrow{M_1M_4} = (-6; -8; -3).$$

2. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 30$$



# Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1; 2; 1), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (-7; 0; -4), \\ \overrightarrow{M_1M_4} = (-6; -8; -3).$$

2. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}) \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -7 & 0 & -4 \\ -6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$$



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

Отсюда на основании геометрического свойства смешанного произведения делаем вывод, что векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_4}$  не являются компланарными,



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

Отсюда на основании геометрического свойства смешанного произведения делаем вывод, что векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_4}$  не являются компланарными, т.е. не лежат в одной плоскости.



## Смешанное произведение векторов

*Пример:*

Выяснить, лежат ли в одной плоскости точки  $M_1(2; 5; 3)$ ,  $M_2(3; 7; 4)$ ,  $M_3(-5; 5; -1)$ ,  $M_4(-4; -3; 0)$ .

*Решение.*

Отсюда на основании геометрического свойства смешанного произведения делаем вывод, что векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_4}$  не являются компланарными, т.е не лежат в одной плоскости. Это значит, что точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  также не лежат в одной плоскости.

