

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана  
Факультет “Фундаментальные науки”  
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия  
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра  
Лекция 1.4

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.



# Геометрические векторы



## *Определение*

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются **скалярными** (длина, температура).



## *Определение*

Величины, которые характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением, называются **векторными** (сила, скорость).



# Геометрические векторы

*Определение*

**Геометрический вектор** – это отрезок с заданным направлением.



# Геометрические векторы

*Определение*

**Геометрический вектор** – это отрезок с заданным направлением.

Обозначение:  $\vec{a}$  или  $\overrightarrow{AB}$ .

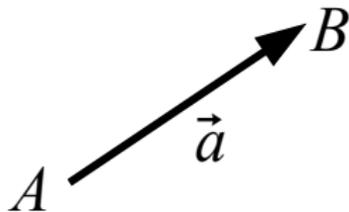


# Геометрические векторы

*Определение*

**Геометрический вектор** – это отрезок с заданным направлением.

Обозначение:  $\vec{a}$  или  $\overrightarrow{AB}$ .

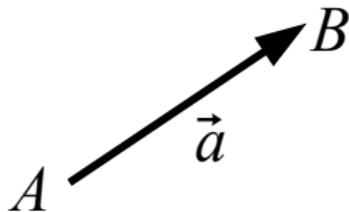


# Геометрические векторы

*Определение*

**Геометрический вектор** – это отрезок с заданным направлением.

Обозначение:  $\vec{a}$  или  $\overrightarrow{AB}$ .



Здесь  $A$  - начало вектора,  $B$  - конец вектора.



# Геометрические векторы

*Виды геометрических векторов:*



# Геометрические векторы

*Виды геометрических векторов:*

1. Если точка приложения вектора не фиксирована, то вектор называется **свободным**.



# Геометрические векторы

*Виды геометрических векторов:*

1. Если точка приложения вектора не фиксирована, то вектор называется **свободным**.
2. Если точку приложения вектора можно перемещать только вдоль прямой, то вектор называется **скользящим**.



# Геометрические векторы

*Виды геометрических векторов:*

1. Если точка приложения вектора не фиксирована, то вектор называется **свободным**.

2. Если точку приложения вектора можно перемещать только вдоль прямой, то вектор называется **скользящим**.

3. Если точка приложения вектора фиксирована, то вектор называется **связанным**.



# Геометрические векторы

*Определение*

**Длиной (модулем)** вектора  $\vec{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ .



*Определение*

**Длиной (модулем)** вектора  $\vec{AB}$  называется  
длина отрезка  $AB$ .

Обозначение:  $|\vec{AB}|$ .



## *Определение*

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.



# Геометрические векторы

## *Определение*

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение:  $\vec{0}$ .



# Геометрические векторы

## *Определение*

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение:  $\vec{0}$ .

Нулевой вектор направления не имеет.



# Геометрические векторы

## *Определение*

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение:  $\vec{0}$ .

Нулевой вектор направления не имеет.

## *Определение*

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.



# Геометрические векторы

## *Определение*

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение:  $\vec{0}$ .

Нулевой вектор направления не имеет.

## *Определение*

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Обозначение:  $\vec{e}$ .



## *Определение*

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , называется **ортом** вектора  $\vec{a}$ .



# Геометрические векторы

## *Определение*

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , называется **ортом** вектора  $\vec{a}$ .

Обозначение:  $\vec{a}^0$ .

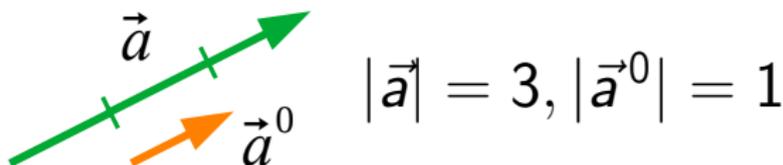


# Геометрические векторы

## Определение

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , называется **ортом** вектора  $\vec{a}$ .

Обозначение:  $\vec{a}^0$ .



# Геометрические векторы

*Определение*

**Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.



# Геометрические векторы

*Определение*

**Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Обозначение:  $\widehat{\vec{a} \vec{b}}$ ,  $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ ,  $\varphi$ .

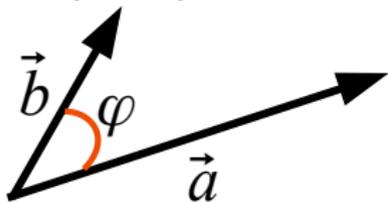


# Геометрические векторы

*Определение*

**Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Обозначение:  $\widehat{\vec{a} \vec{b}}$ ,  $(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $\varphi$ .

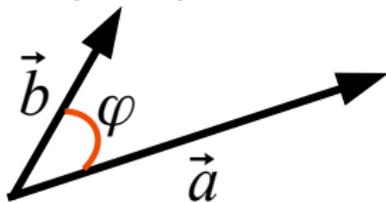


# Геометрические векторы

*Определение*

**Углом между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  называют величину наименьшего из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Обозначение:  $\widehat{\vec{a} \vec{b}}$ ,  $(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $\varphi$ .



$$0 \leq \varphi \leq \pi$$



*Определение*

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **ортогональными**, если угол между ними прямой.



*Определение*

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **ортогональными**, если угол между ними прямой.

Обозначение:  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .



# Геометрические векторы

## *Определение*

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.



# Геометрические векторы

## *Определение*

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Обозначение:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

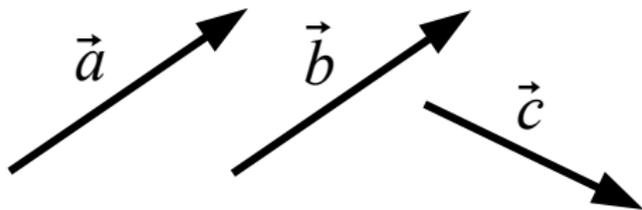


# Геометрические векторы

## Определение

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Обозначение:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

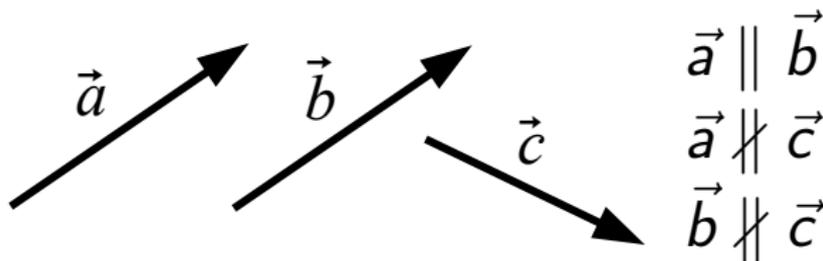


# Геометрические векторы

## Определение

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Обозначение:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .



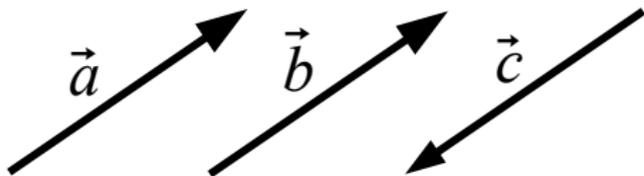
# Геометрические векторы

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление,  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ) или **противоположно направлены** ( $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ).



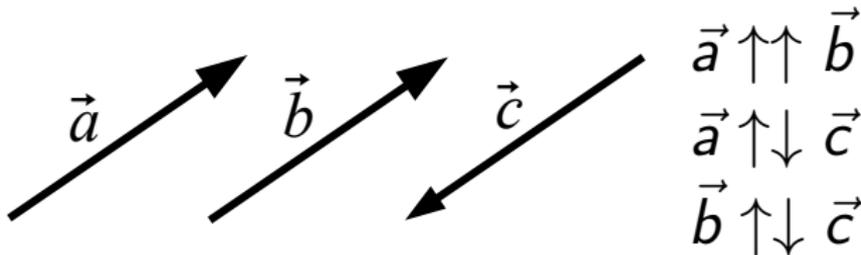
# Геометрические векторы

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление,  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ) или **противоположно направлены** ( $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ).



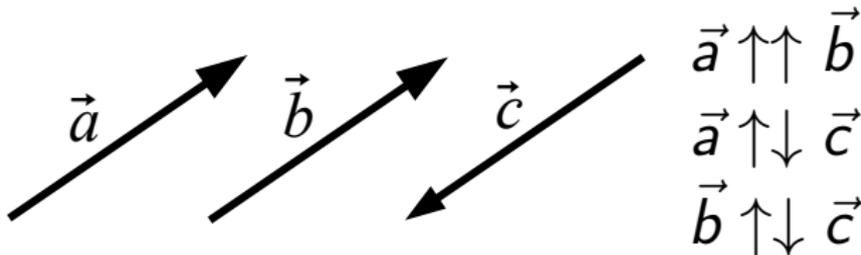
# Геометрические векторы

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление,  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ) или **противоположно направлены** ( $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ).



# Геометрические векторы

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление,  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ) или **противоположно направлены** ( $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ).



Нулевой вектор считается одновременно коллинеарным и ортогональным любому вектору.



## *Определение*

Три вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.



## *Определение*

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.



## *Определение*

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.

Обозначение:  $\vec{a} = \vec{b}$ .



# Линейные операции над векторами



# Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся:



# Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся:

1) сложение векторов;



# Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся:

- 1) сложение векторов;
- 2) умножение вектора на число.



*Определение*

**Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  называется вектор  $\vec{c}$ , направленный из начала вектора  $\vec{a}$  в конец вектора  $\vec{b}$  при условии, что  $\vec{b}$  приложен к концу  $\vec{a}$ .



# Линейные операции над векторами

*Определение*

**Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$**  называется вектор  $\vec{c}$ , направленный из начала вектора  $\vec{a}$  в конец вектора  $\vec{b}$  при условии, что  $\vec{b}$  приложен к концу  $\vec{a}$ .

Обозначение:  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .



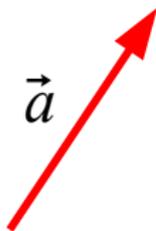
# Линейные операции над векторами

Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



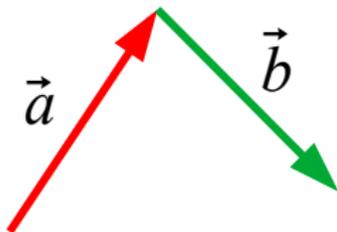
# Линейные операции над векторами

Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



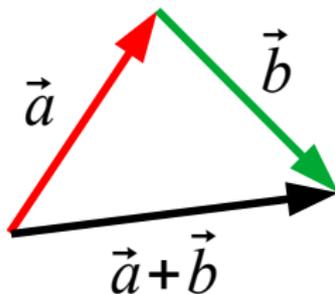
# Линейные операции над векторами

Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



# Линейные операции над векторами

Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



## *Определение*

**Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$**  называется такой вектор  $\vec{c}$ , что

1)  $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ;

2)  $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и  $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$ , если  $\lambda < 0$ .



## Определение

Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется такой вектор  $\vec{c}$ , что

1)  $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ;

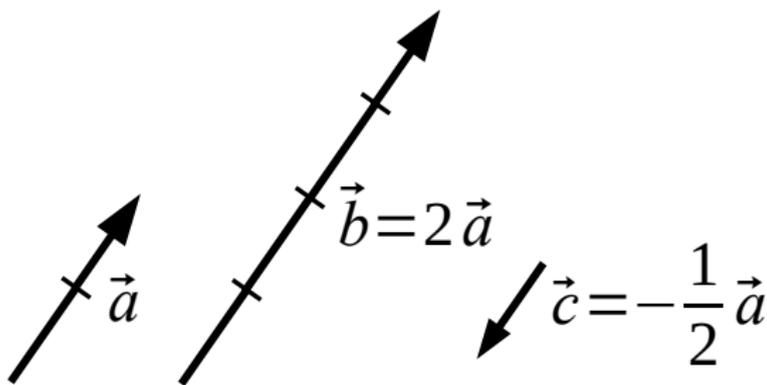
2)  $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , и  $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$ , если  $\lambda < 0$ .

Обозначение:  $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a}$  или  $\vec{c} = \lambda\vec{a}$ .



# Линейные операции над векторами

Примеры:



# Линейные операции над векторами

*Свойства линейных операций над векторами:*



# Линейные операции над векторами

*Свойства линейных операций над векторами:*

1) коммутативный закон сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$



# Линейные операции над векторами

*Свойства линейных операций над векторами:*

1) коммутативный закон сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

2) ассоциативный закон сложения векторов

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$



# Линейные операции над векторами

*Свойства линейных операций над векторами:*

1) коммутативный закон сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

2) ассоциативный закон сложения векторов

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

3) ассоциативный закон умножения вектора на число относительно умножения чисел

$$\alpha (\beta \vec{a}) = (\alpha \beta) \vec{a} = \beta (\alpha \vec{a}),$$



# Линейные операции над векторами

*Свойства линейных операций над векторами:*

4) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения векторов

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b},$$



# Линейные операции над векторами

*Свойства линейных операций над векторами:*

4) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения векторов

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b},$$

5) дистрибутивный закон умножения вектора на число относительно сложения чисел

$$(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a},$$



# Линейные операции над векторами

*Свойства линейных операций над векторами:*

б) умножение на ноль

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0},$$



# Линейные операции над векторами

*Свойства линейных операций над векторами:*

6) умножение на ноль

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0},$$

7) сложение с нулевым вектором

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$



# Линейные операции над векторами

*Следствия из свойств линейных операций:*



# Линейные операции над векторами

*Следствия из свойств линейных операций:*

1. Вектор  $-\vec{a}$ , называемый **противоположным** вектору  $\vec{a}$ , определяется как

$$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}.$$

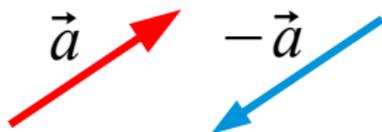


# Линейные операции над векторами

*Следствия из свойств линейных операций:*

1. Вектор  $-\vec{a}$ , называемый **противоположным** вектору  $\vec{a}$ , определяется как

$$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}.$$



# Линейные операции над векторами

*Следствия линейных операций:*

2. Вектор  $\vec{a} - \vec{b}$ , называемый **разностью** векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

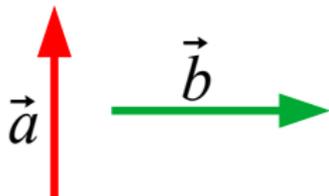


# Линейные операции над векторами

*Следствия линейных операций:*

2. Вектор  $\vec{a} - \vec{b}$ , называемый **разностью** векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



# Линейные операции над векторами

*Следствия линейных операций:*

2. Вектор  $\vec{a} - \vec{b}$ , называемый **разностью** векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

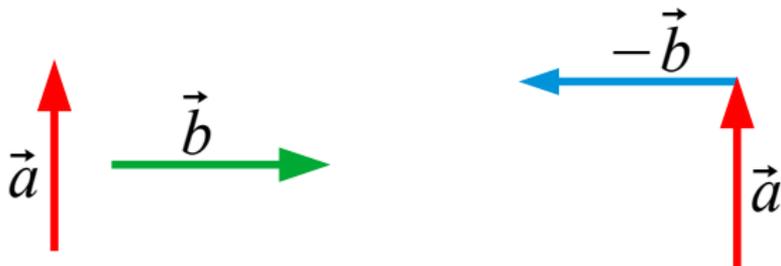


# Линейные операции над векторами

*Следствия линейных операций:*

2. Вектор  $\vec{a} - \vec{b}$ , называемый **разностью** векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



# Линейные операции над векторами

*Следствия линейных операций:*

2. Вектор  $\vec{a} - \vec{b}$ , называемый **разностью** векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , определяется как

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



# Линейная зависимость векторов



# Линейная зависимость векторов

*Определение*

Выражение

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$$

называется **линейной комбинацией**  
**векторов**  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n,$



# Линейная зависимость векторов

*Определение*

Выражение

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$$

называется **линейной комбинацией векторов**  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ,

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  - любые действительные числа, называемые **коэффициентами** линейной комбинации.



# Линейная зависимость векторов

## *Определение*

Будем говорить, что **вектор  $\vec{b}$  разлагается (линейно выражается) по векторам  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$** , если он равен некоторой их линейной комбинации.



# Линейная зависимость векторов

## Определение

Будем говорить, что вектор  $\vec{b}$  разлагается (линейно выражается) по векторам  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , если он равен некоторой их линейной комбинации. Числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  называются **коэффициентами разложения** вектора  $\vec{b}$  по системе векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ .



# Линейная зависимость векторов

## *Определение*

Линейная комбинация векторов называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.



# Линейная зависимость векторов

## *Определение*

Система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.



# Линейная зависимость векторов

## *Определение*

Система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  называется **линейно независимой**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору.



# Линейная зависимость векторов

*Теорема (критерий линейной зависимости  
векторов)*



# Линейная зависимость векторов

*Теорема (критерий линейной зависимости  
векторов)*

Система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-либо из векторов этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных.



# Линейная зависимость векторов

*Примеры:*



# Линейная зависимость векторов

*Примеры:*

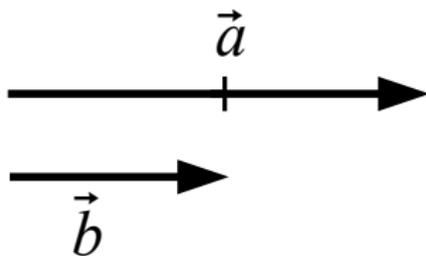
1.



# Линейная зависимость векторов

Примеры:

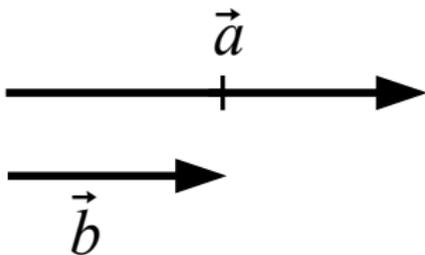
1.



# Линейная зависимость векторов

Примеры:

1.



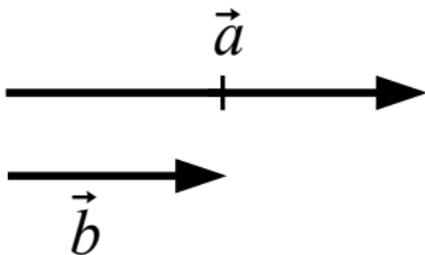
Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  линейно зависимы, т.к. вектор  $\vec{a}$  можно выразить через вектор  $\vec{b}$  в виде  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$ .



# Линейная зависимость векторов

Примеры:

1.



Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  линейно зависимы, т.к. вектор  $\vec{a}$  можно выразить через вектор  $\vec{b}$  в виде  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$ . Тогда для  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору:  $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$ .



# Линейная зависимость векторов

*Примеры:*

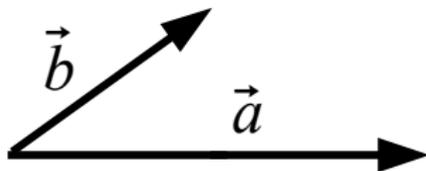
2.



# Линейная зависимость векторов

Примеры:

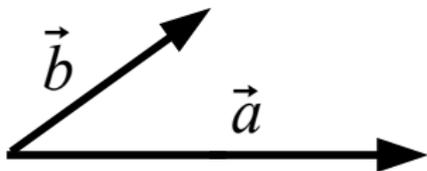
2.



# Линейная зависимость векторов

Примеры:

2.



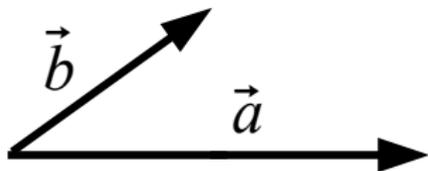
Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  линейно независимы, т.к. вектор  $\vec{a}$  нельзя выразить через вектор  $\vec{b}$ .



# Линейная зависимость векторов

Примеры:

2.



Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  линейно независимы, т.к. вектор  $\vec{a}$  нельзя выразить через вектор  $\vec{b}$ . Для векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно составить лишь тривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору:  $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$ .



# Линейная зависимость векторов

*Примеры:*

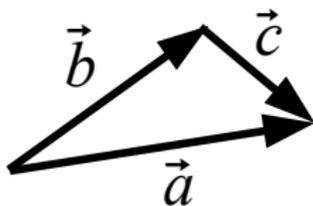
3.



# Линейная зависимость векторов

Примеры:

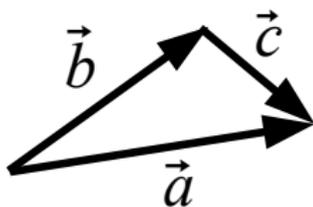
3.



# Линейная зависимость векторов

Примеры:

3.



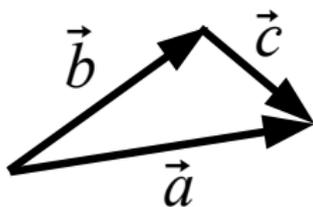
Векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  линейно зависимы, т.к. вектор  $\vec{a}$  можно выразить через векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  в виде  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ .



# Линейная зависимость векторов

Примеры:

3.



Векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  линейно зависимы, т.к. вектор  $\vec{a}$  можно выразить через векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  в виде  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ . Тогда  $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ .



# Линейная зависимость векторов

*Свойства систем линейно зависимых и  
независимых векторов:*



# Линейная зависимость векторов

*Свойства систем линейно зависимых и  
независимых векторов:*

1. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.



# Линейная зависимость векторов

*Свойства систем линейно зависимых и  
независимых векторов:*

1. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.
2. Если система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно независима, то любая часть этой системы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_s$  ( $s < n$ ) линейно независима.



# Линейная зависимость векторов

*Свойства систем линейно зависимых и  
независимых векторов:*

3. Если система векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно зависима, то любая дополненная система  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_{n+m}$  линейно зависима.



# Линейная зависимость векторов

*Свойства систем линейно зависимых и  
независимых векторов:*

4. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.



# Линейная зависимость векторов

*Свойства систем линейно зависимых и  
независимых векторов:*

4. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
5. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.



# Линейная зависимость векторов

*Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:*

4. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
5. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.
6. Любые четыре вектора линейно зависимы.

