

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.1

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.



Матрицы



Определение

Числовой матрицей размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, в которой имеется m строк и n столбцов.



Определение

Числовой матрицей размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, в которой имеется m строк и n столбцов. Составляющие матрицу числа называются ее **элементами**.



Матрицы

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами A , B , C , ...



Матрицы

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами A , B , C , ...

и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$



Матрицы

a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j .



Матрицы

a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j .

Иногда в обозначении матрицы указывается ее размерность: $A_{m \times n}$, где m - число строк, а n - число столбцов.



Матрицы

a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j .

Иногда в обозначении матрицы указывается ее размерность: $A_{m \times n}$, где m - число строк, а n - число столбцов.

Часто используется сокращенная запись матрицы: $A = (a_{ij})$.



Матрицы

Пример:



Матрицы

Пример:

$$A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$



Матрицы

Пример:

$$A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет размер 2×4 , т.к. она содержит 2 строчки и 4 столбца,



Матрицы

Пример:

$$A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет размер 2×4 , т.к. она содержит 2 строчки и 4 столбца, ее элемент $a_{23} = 7$ расположен во второй строке и третьем столбце.



Виды матриц



Виды матриц

Определение

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**, в противном случае - **прямоугольной**.



Виды матриц

Определение

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**, в противном случае - **прямоугольной**.

Определение

Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **матрицей n -ого порядка**.



Виды матриц

Определение

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ - **побочную**.



Виды матриц

Определение

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ - **побочную**.

Пример:



Виды матриц

Определение

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ - **побочную**.

Пример:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Виды матриц

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.



Виды матриц

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Определение

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

Обозначение: E .



Виды матриц

Определение

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.



Виды матриц

Определение

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.

Пример:



Виды матриц

Определение

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.

Пример:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Виды матриц

Определение

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

Обозначение: O .



Виды матриц

Определение

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

Обозначение: O .

Определение

Матрица, состоящая только из одного столбца или одной строки, называется **вектором** (**вектор-столбцом** или **вектор-строкой**)



Линейные операции над матрицами



Линейные операции над матрицами

К линейным операциям относятся:



Линейные операции над матрицами

К линейным операциям относятся:

1) сложение матриц,



Линейные операции над матрицами

К линейным операциям относятся:

- 1) сложение матриц,
- 2) умножение матрицы на число.



Линейные операции над матрицами

Определение

Две матрицы A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.



Определение

Две матрицы A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A = B$.



Определение

Суммой двух матриц одинакового размера A и B называется матрица C , элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B .



Определение

Суммой двух матриц одинакового размера A и B называется матрица C , элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B .
Обозначение: $C = A + B$.



Линейные операции над матрицами

Пример:



Линейные операции над матрицами

Пример:

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Линейные операции над матрицами

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда



Линейные операции над матрицами

Пример:

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C = A + B$$



Линейные операции над матрицами

Пример:

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Линейные операции над матрицами

Пример:

$$\text{Пусть } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Линейные операции над матрицами

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$\begin{aligned} C = A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Определение

Произведением матрицы A на число α называется матрица B , каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы A на число α .



Определение

Произведением матрицы A на число α называется матрица B , каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы A на число α .

Обозначение: $B = \alpha \cdot A$ или $B = \alpha A$.



Линейные операции над матрицами

Пример:



Линейные операции над матрицами

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.



Линейные операции над матрицами

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда



Линейные операции над матрицами

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$B = 2 \cdot A$$



Линейные операции над матрицами

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$B = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$



Линейные операции над матрицами

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$B = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix}$$



Линейные операции над матрицами

Пример:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$B = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$



Линейные операции над матрицами

Свойства линейных операций:



Линейные операции над матрицами

Свойства линейных операций:

1) коммутативный закон сложения матриц

$$A + B = B + A;$$



Линейные операции над матрицами

Свойства линейных операций:

1) коммутативный закон сложения матриц

$$A + B = B + A;$$

2) ассоциативный закон сложения матриц

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$



Линейные операции над матрицами

Свойства линейных операций:

1) коммутативный закон сложения матриц

$$A + B = B + A;$$

2) ассоциативный закон сложения матриц

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

3) ассоциативный закон умножения матрицы на число относительно умножения чисел

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A);$$



Линейные операции над матрицами

Свойства линейных операций:

4) дистрибутивный закон умножения матрицы на число относительно сложения матриц

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$



Линейные операции над матрицами

Свойства линейных операций:

4) дистрибутивный закон умножения матрицы на число относительно сложения матриц

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

5) дистрибутивный закон умножения матрицы на число относительно сложения чисел

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$



Линейные операции над матрицами

Следствия из свойств линейных операций:



Линейные операции над матрицами

Следствия из свойств линейных операций:

1. Матрица $-A$, называемая **противоположной** матрице A , определяется как

$$-A = (-1) \cdot A.$$



Линейные операции над матрицами

Следствия из свойств линейных операций:

1. Матрица $-A$, называемая **противоположной** матрице A , определяется как

$$-A = (-1) \cdot A.$$

2. Матрица $A - B$, называемая **разностью** матриц A и B , определяется как

$$A - B = A + (-B).$$



Нелинейные операции над матрицами



Нелинейные операции над матрицами

К нелинейным операциям относятся:



Нелинейные операции над матрицами

К нелинейным операциям относятся:

1) умножение матриц,



Нелинейные операции над матрицами

К нелинейным операциям относятся:

- 1) умножение матриц,
- 2) транспонирование матрицы.



Определение

Произведением двух матриц

$A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{n \times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times k}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -ого столбца матрицы B , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$



Определение

Произведением двух матриц

$A_{m \times n} = (a_{ij})$ и $B_{n \times k} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times k}$, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i -ой строки матрицы A на соответствующие элементы j -ого столбца матрицы B , т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Обозначение: $C = A \cdot B$ или $C = AB$.



Нелинейные операции над матрицами

Замечание



Нелинейные операции над матрицами

Замечание

Операция умножения матриц определена, только если число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы.



Нелинейные операции над матрицами

Замечание

Операция умножения матриц определена, только если число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы. Такие матрицы называют **согласованными**.



Нелинейные операции над матрицами

Пример:



Нелинейные операции над матрицами

Пример: Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$, когда

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Нелинейные операции над матрицами

Пример: Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$, когда

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы $A_{2 \times 2}$ совпадает с числом строк матрицы $B_{2 \times 3}$.



Нелинейные операции над матрицами

Пример: Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$, когда

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы $A_{2 \times 2}$ совпадает с числом строк матрицы $B_{2 \times 3}$. Значит, матрица $A \cdot B$ существует



Нелинейные операции над матрицами

Пример: Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$, когда

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число столбцов матрицы $A_{2 \times 2}$ совпадает с числом строк матрицы $B_{2 \times 3}$. Значит, матрица $A \cdot B$ существует и имеет размерность 2×3 .



Нелинейные операции над матрицами

$A \cdot B$



Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$



Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$



Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ & \end{pmatrix}$$



Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}$$



Нелинейные операции над матрицами

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Нелинейные операции над матрицами

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & \end{pmatrix}$$



Нелинейные операции над матрицами

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Нелинейные операции над матрицами

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Нелинейные операции над матрицами

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Нелинейные операции над матрицами

Число столбцов матрицы $B_{2 \times 3}$ отличается от числа строк матрицы $A_{2 \times 2}$. Следовательно, матрица $B \cdot A$ не существует.



Нелинейные операции над матрицами

Свойства операции умножения:



Нелинейные операции над матрицами

Свойства операции умножения:

$$1) (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$



Нелинейные операции над матрицами

Свойства операции умножения:

$$1) (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

$$2) A \cdot (B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B) \cdot C = AC + BC;$$



Нелинейные операции над матрицами

Свойства операции умножения:

$$1) (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

$$2) A \cdot (B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B) \cdot C = AC + BC;$$

$$3) (\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B) = A \cdot (\alpha B);$$



Нелинейные операции над матрицами

Свойства операции умножения:

$$1) (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

$$2) A \cdot (B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B) \cdot C = AC + BC;$$

$$3) (\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B) = A \cdot (\alpha B);$$

$$4) \text{ в общем случае } A \cdot B \neq B \cdot A;$$



Нелинейные операции над матрицами

Свойства операции умножения:

$$1) (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

$$2) A \cdot (B + C) = AB + AC,$$

$$(A + B) \cdot C = AC + BC;$$

$$3) (\alpha A) \cdot B = \alpha (A \cdot B) = A \cdot (\alpha B);$$

$$4) \text{ в общем случае } A \cdot B \neq B \cdot A;$$

$$5) A \cdot E = A, E \cdot A = A, \text{ где } E - \text{ единичная матрица.}$$



Следствие из свойств операции умножения:



Нелинейные операции над матрицами

Следствие из свойств операции умножения:

Матрица A^n , называемая **n -ой степенью** квадратной матрицы A , определяется как

$$A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \text{ (} n \text{ раз)}.$$



Следствие из свойств операции умножения:

Матрица A^n , называемая **n -ой степенью** квадратной матрицы A , определяется как

$$A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \text{ (} n \text{ раз)}.$$

При этом полагают, что $A^0 = E$.



Нелинейные операции над матрицами

Определение

Матрица, полученная из матрицы A путем замены ее строк на столбцы с соответствующими номерами, называется **транспонированной** к A .



Нелинейные операции над матрицами

Определение

Матрица, полученная из матрицы A путем замены ее строк на столбцы с соответствующими номерами, называется **транспонированной** к A .

Обозначение: A^T .



Нелинейные операции над матрицами

Определение

Матрица, полученная из матрицы A путем замены ее строк на столбцы с соответствующими номерами, называется **транспонированной** к A .

Обозначение: A^T .

Определение

Операция получения транспонированной матрицы называется **транспонированием матрицы**.



Нелинейные операции над матрицами

Пример:



Нелинейные операции над матрицами

Пример:

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$



Нелинейные операции над матрицами

Пример:

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$



Свойства операции транспонирования:



Свойства операции транспонирования:

$$1) (A^T)^T = A;$$



Нелинейные операции над матрицами

Свойства операции транспонирования:

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$



Свойства операции транспонирования:

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$3) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T;$$



Свойства операции транспонирования:

$$1) (A^T)^T = A;$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$3) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T;$$

$$4) (\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T.$$



Определение

Квадратная матрица A называется **симметрической (или симметричной)**, если она не изменяется в результате транспонирования, т.е. $A^T = A$.



Элементарные преобразования матриц



Элементарные преобразования матриц

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:



Элементарные преобразования матриц

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

1) перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;



Элементарные преобразования матриц

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

- 1) перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;
- 2) умножение и деление всех элементов ряда на число, отличное от нуля;



Элементарные преобразования матриц

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на число, отличное от нуля;



Элементарные преобразования матриц

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

- 3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на число, отличное от нуля;
- 4) вычитание из элементов ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на число, отличное от нуля.



Элементарные преобразования матриц

Определение

Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.



Элементарные преобразования матриц

Определение

Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: $A \sim B$.

