Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Текст 4.4

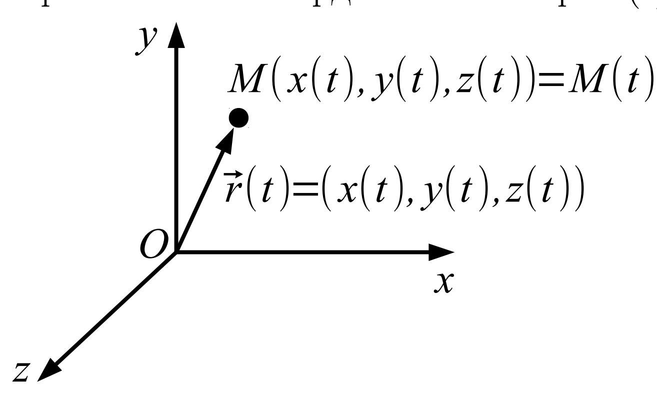
Аннотация

Элементы теории кривых. Кривизна и радиус кривизны плоской кривой.

1 Теория кривых

Пусть векторы $\overline{r}(t)$ при всех значениях переменной t прикреплены к точке O, которая является началом декартовой системы координат.

Вектор $\overline{r}(t)$ соединяет точку O с некоторой точкой M. Соответственно, $\overline{r}(t)$ является радиус-вектором точки M. Тогда за координаты точки M принимаются координаты вектора $\overline{r}(t)$.



Определение

Непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ числовой прямой в трехмерное пространство R^3 называется **кривой** и обозначается Γ.

Способы задания кривой:

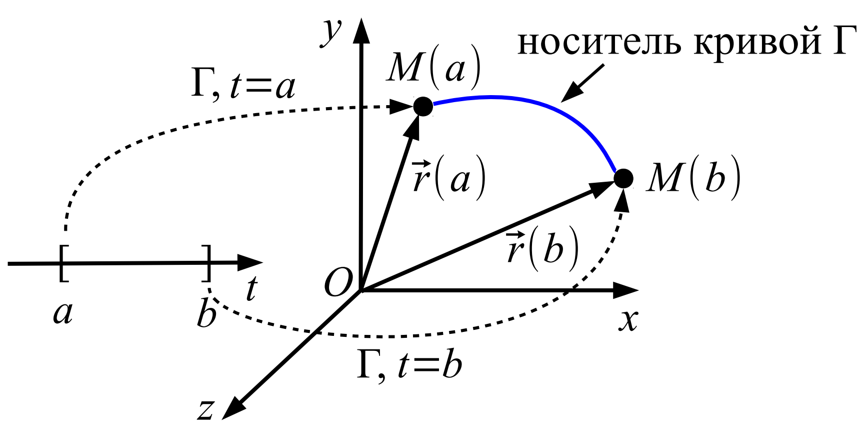
1. $\Gamma = \{M(t)|a \le t \le b\}$ - точечное представление. Кривая Γ задается как отображение $M(t)$, ставящее в соответствие числу t точку M пространства.

2. $\Gamma = \{\overline{r}(t)|a \le t \le b\}$ - векторное представление. Кривая Γ задается в виде векторной функции $\overline{r}(t)$, ставящей в соответствие числу t радиус-вектор $\overline{r}$ точки пространства.

3. $\Gamma = \{x(t), y(t), z(t)|a \le t \le b\}$ - координатное представление. Кривая Γ задается в виде трех скалярных функций, представляющих собой координаты точки в заданной декартовой системе координат.

Определение

Множество точек трехмерного пространства R^3, на которое отображается отрезок $[a, b]$, называется **носителем кривой** Γ.



Определение

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то кривая называется **плоской**.

Замечание:

В дальнейшем под словом кривая мы будем понимать как саму кривую (отображение), так и ее носитель в зависимости от контекста.

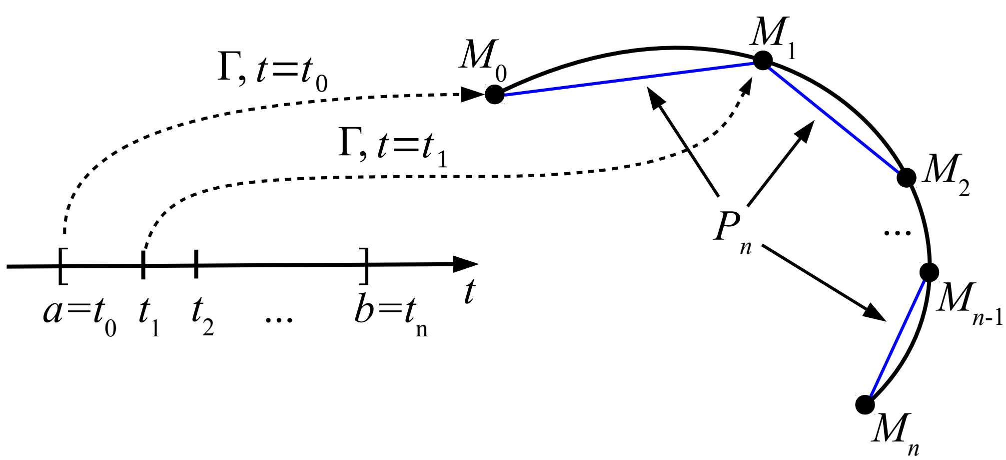
Определение

Последовательность точек $t_0, t_1, ..., t_n$, удовлетворяющая условию $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$, называется **разбиением отрезка** $[a, b]$.

Определение

Последовательность точек кривой $M_0, M_1, ..., M_n$, соответствующая значениям $t_0, t_1, ..., t_n$, называется **разбиением кривой** Γ.

Соединив точки $M_0, M_1, ..., M_n$ отрезками, получим ломаную P_n, которая называется **вписанной в кривую** Γ.



Длина каждого отрезка $M_{k-1}M_k$ равна $|\overline{r}(t_k) - \overline{r}(t_{k-1})|$. Следовательно, длина σ_n всей ломаной P_n равна

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |\overline{r}(t_k) - \overline{r}(t_{k-1})|.$$

Определение

Длиной кривой Γ называется точная верхняя грань длин всевозможных ломаных P_n, т.е.

$$L_\Gamma = \sup \sigma_n.$$

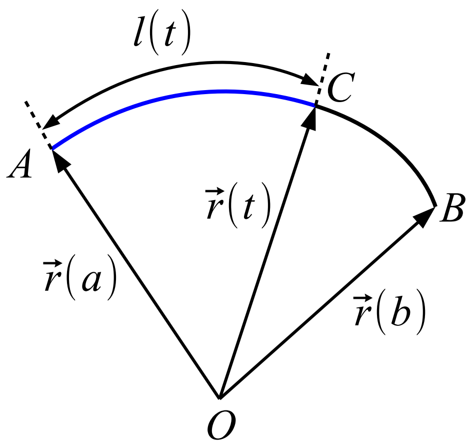
Определение

Если функция $\overline{r}'(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то кривая Γ называется **непрерывно дифференцируемой**.

Теорема (о переменной длине дуги)

Пусть кривая Γ непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги l, отсчитываемая от начала $\overline{r}(a)$ кривой Γ, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной t. При этом

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \left|\frac{d\overline{r}}{dt}\right|.$$



На рисунке $l(t)$ - длина участка AC кривой AB, причем $l(a) = 0$.

Рассмотрим плоскую кривую $\Gamma = \{x(t), y(t) | a \leq t \leq b\}$. Тогда

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$\Downarrow$$

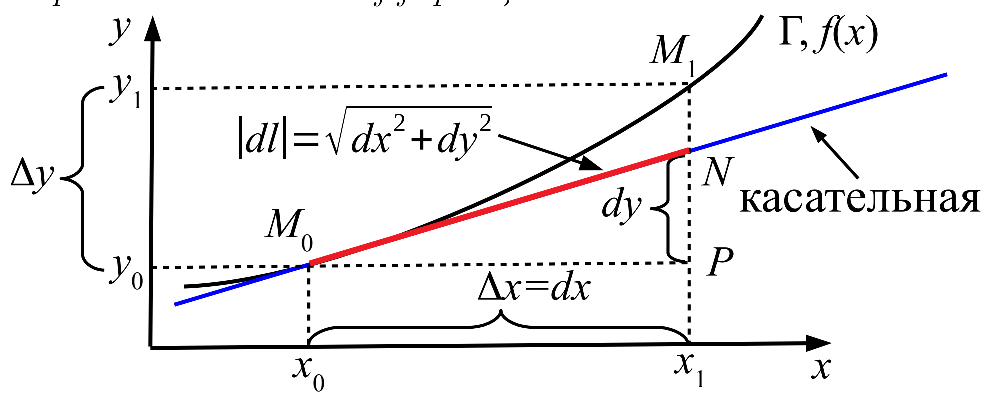
$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

или

$$(dl)^2 = (x'dt)^2 + (y'dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2.$$

Здесь dl - дифференциал длины дуги $l = l(t)$ плоской кривой Γ.

Геометрический смысл дифференциала dl:



Пусть кривая Γ в окрестности точки x_0 совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Тогда кривую Γ можно задать в виде:

$$\Gamma = \{x, f(x) | x \in U(x_0)\},$$

беря в качестве независимой переменной t переменную x: $t = x$.

Рассмотрим на кривой Γ дугу M_0M_1 длины $\Delta l = l(x_1) - l(x_0)$. Тогда

$M_0P = \Delta x = dx = x_1 - x_0$ - приращение аргумента x функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке x_1.

$PM_1 = \Delta y = y_1 - y_0$ - приращение значения функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке x_1.

$PN = dy = f'(x_0)dx$ - приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе от точки x_0 к точке x_1.

Поскольку ΔM_0PN - прямоугольный, то

$$M_0N^2 = M_0P^2 + PN^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dl)^2.$$

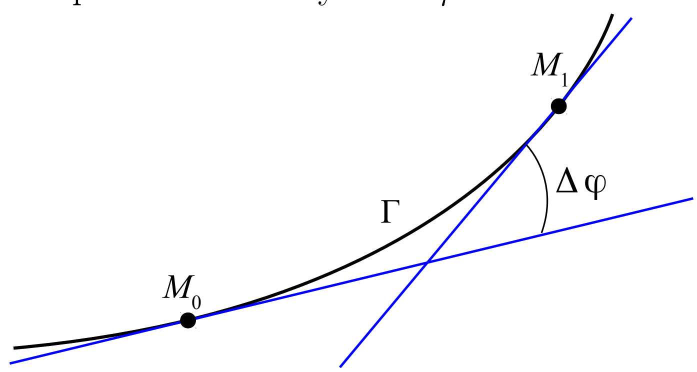
$$\Downarrow$$

$$|dl| = M_0N.$$

Отсюда получаем, что дифференциал длины дуги dl по абсолютной величине равен длине участка касательной, заключенного между точками x_0 и x_1.

2 Кривизна и радиус кривизны плоской кривой

Рассмотрим на плоской кривой Γ точки M_0 и M_1. Проведем через эти точки касательные. При переходе от точки M_0 к точке M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$.



Определение

Отношение угла $\Delta\varphi$ к длине Δl дуги, заключенной между точками M_0 и M_1, называется **средней кривизной дуги**:

$$K_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}.$$

K_{sr} характерезует среднюю изогнутость кривой. Чем меньше K_{sr}, тем ближе кривая к прямой.

Определение

Кривизной кривой Γ в точке M_0 называется предел

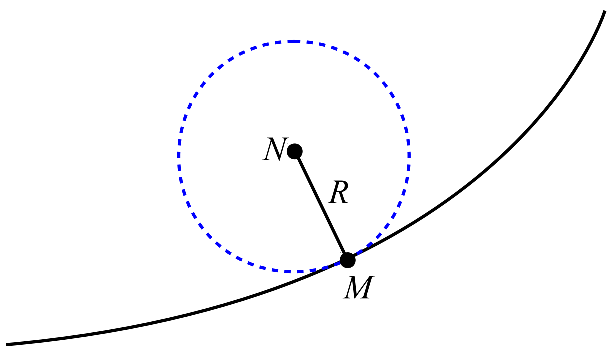
$$K = \lim_{M_1 \to M_0} K_{sr}.$$

Определение

Величина, обратная кривизне, называется **радиусом кривизны**.

Обозначение: $R = \dfrac{1}{K}$.

Проведем к кривой Γ в точке M нормаль и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок MN с длиной, равной R.



Определение

Точка N называется **центром кривизны**, а окружность с центром в точке N и радиусом R - **окружностью кривизны** плоской кривой в точке M.