

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Текст 4.2

Аннотация

Неявные функции, системы неявных функций и их производные. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению и градиент.

1 Неявные функции

Определение

Функция $y = y(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, называется **неявной функцией**, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, если выполняется равенство $F(x, y(x)) = 0$.

Пример:

Функция $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ может быть неявно задана уравнением $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = 1$.

Теорема (о существовании и дифференцируемости неявной функции)

Пусть выполняются следующие условия:

1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и имеет в этой точке непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$,

2) $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$,

3) $\frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y} \neq 0$.

Тогда

1) существует окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет единственную непрерывную функцию $y = y(x)$ такую, что $y(x^{(0)}) = y^{(0)}$,

2) частные производные $\frac{\partial y}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и в этой точке вычисляются по формуле

$$\frac{\partial y(x^{(0)})}{\partial x_i} = -\frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial x_i} / \frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y}, i = \overline{1, n}.$$

Определение

Функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_m = y_m(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, называются **неявными функциями, заданными системой уравнений**

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ F_2(x, y_1, \dots, y_m) = 0, \\ \dots \\ F_m(x, y_1, \dots, y_m) = 0, \end{cases}$$

если выполняются равенства

$$\begin{cases} F_1(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) = 0, \\ F_2(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) = 0, \\ \dots \\ F_m(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) = 0. \end{cases}$$

Теорема (о существовании и дифференцируемости системы неявных функций)

Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $F_i(x, y_1, \dots, y_m), i = \overline{1, m}$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$ вместе со своими частными производными,

2) $F_i(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}) = 0, i = \overline{1, m}$,

3) якобиан

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

не равен нулю в точке $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$.

Тогда

1) существует окрестность точки $(x^{(0)}, y_1^{(0)}, \dots, y_m^{(0)})$, в которой система уравнений $F_i(x, y_1, \dots, y_m) = 0, i = \overline{1, m}$ определяет единственную систему функций $y_i = y_i(x), i = \overline{1, m}$ таких, что $y_i^{(0)} = y_i(x^{(0)}), i = \overline{1, m}$,

2) функции $y_i = y_i(x), i = \overline{1, m}$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^{(0)}$,

3) частные производные $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ в точке $x^{(0)}$ могут быть найдены из системы

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = 0, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}.$$

2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть в трехмерном пространстве R^3 задана поверхность S с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$.

Определение

Прямая l , проходящая через заданную точку M поверхности S , называется **касательной прямой** к поверхности S в точке M , если l является касательной к какой-нибудь кривой, целиком лежащей на поверхности S .

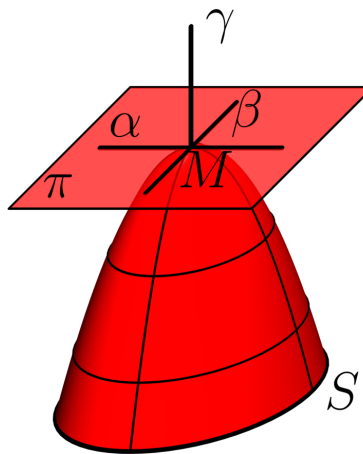
Определение

Плоскость, в которой лежат все касательные прямые к поверхности S в точке M , называется **касательной плоскостью** к поверхности S в точке M .

Определение

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку M , называется **нормалью** к поверхности S в точке M .

Пример:



На рисунке в точке M поверхности S построена касательная плоскость π , в которой проведены две касательные прямые α и β . Также показана нормаль γ .

Уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0.$$

Канонические уравнения нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M)}.$$

Здесь x_0, y_0, z_0 - координаты точки M .

3 Производная по направлению и градиент

Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x_0, y_0, z_0)$. Через точку M проведем прямую P в направлении вектора $\bar{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы данного вектора.

Параметрические уравнения прямой P имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha, \\ y = y_0 + t \cos \beta, \\ z = z_0 + t \cos \gamma. \end{cases}$$

Подставив эти уравнения в функцию $u = f(x, y, z)$, получим новую функцию одной переменной

$$F(t) = f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma),$$

которая определена в точках прямой P .

Определение

Производная dF/dt при $t = 0$ называется **производной** функции $f(x, y, z)$ в точке M **по направлению вектора** \bar{e} .

Обозначение: $\frac{\partial f(M)}{\partial \bar{e}}$.

Формула для вычисления:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \bar{e}} = \frac{\partial f(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(M)}{\partial z} \cos \gamma.$$

Производная по направлению показывает, как быстро изменяется значение функции, если мы начинаем движение из данной точки M в данном направлении \bar{e} .

Определение

Градиентом функции $f(x, y, z)$ называется вектор с координатами

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Обозначение: ∇f , $\text{grad} f$.

Таким образом,

$$\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Свойства производной по направлению и градиента:

1. $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = (\text{grad} f, \bar{e}) = |\text{grad} f| \cdot \cos(\bar{e}, \text{grad} f)$.
2. $\text{grad} f$ показывает направление наибольшего возрастания функции f .
3. Если $\bar{e} \uparrow \uparrow \text{grad} f$, то $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = |\text{grad} f|$.
4. Если $\bar{e} \perp \text{grad} f$, то $\frac{\partial f}{\partial \bar{e}} = 0$.