Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Текст 4.1

Аннотация

Типы множеств в n-мерном пространстве. Приближенные вычисления значений функций. Частные производные высших порядков.

1 Типы множеств

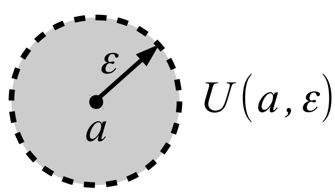
Определение

Совокупность всех точек $x \in R^n$ таких, что $\rho(x, a) < \varepsilon$, называется **n-мерным шаром** радиуса ε с центром в точке a или **ε-окрестностью** точки a.

Обозначение: $U(a, \varepsilon) = \{x | \rho(x, a) < \varepsilon\}$.

Пример:

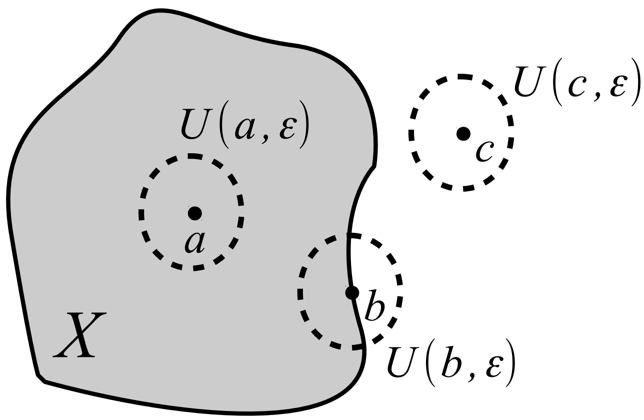
В пространстве R^2 (на плоскости) ε-окрестность $U(a, \varepsilon)$ представляет собой круг радиуса ε. Граничные точки в состав круга не входят, из-за чего на рисунках граница круга изображается пунктирной линией.



Определение

Пусть дано множество $X \subset R^n$. Точка $a \in X$ называется **внутренней точкой** этого множества, если она имеет ε-окрестность $U(a, \varepsilon)$, целиком лежащую в X.

Пример:

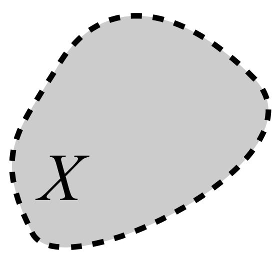


Здесь точка a является внутренней точкой множества X, т.к. ее ε-окрестность $U(a,\varepsilon)$ целиком лежит в X. Точки b и c **не** являются внутренними, т.к. $U(b,\varepsilon)$ лежит в X лишь частично, а $U(c,\varepsilon)$ располагается полностью за пределами X.

Определение

Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой, называется **открытым**.

Пример:

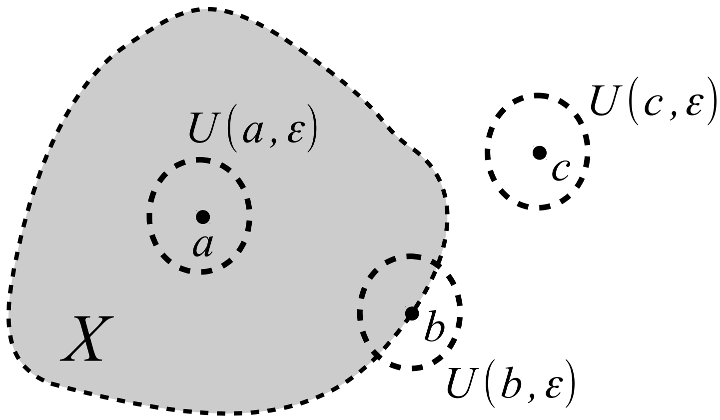


Граница открытого множества самому множеству не принадлежит. Поэтому ее изображают пунктирной линией.

Определение

Точка a называется **точкой прикосновения** множества X, если в любой ее ε-окрестности $U(a,\varepsilon)$ (при любом значении ε) содержится хотя бы одна точка множества X.

Пример:



На рисунке X - открытое множество, точки a и b - точки прикосновения множества X, точка c **не** является точкой прикосновения множества X, т.к. ε-окрестности $U(a,\varepsilon)$ и $U(b,\varepsilon)$ содержат точки из X, а $U(c,\varepsilon)$ целиком лежит вне X.

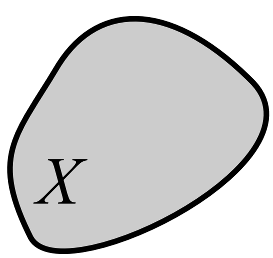
Определение

Совокупность всех точек прикосновения множества X называется **замыканием** множества X и обозначается: $\overline{X}$.

Определение

Множество X называется **замкнутым**, если $X = \overline{X}$.

Пример:

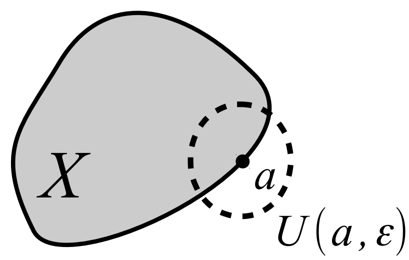


Граница замкнутого множества принадлежит самому множеству. Поэтому ее изображают сплошной линией.

Определение

Точка a называется **граничной точкой** множества X, если любая ее ε-окрестность $U(a, \varepsilon)$ (при любом значении ε) содержит точки как принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие ему.

Пример:



Точка a - граничная точка множества X, т.к. ее ε-окрестность $U(a, \varepsilon)$ частично находится внутри X и частично снаружи.

Определение

Множество всех граничных точек множества X называется **границей** множества X и обозначается ∂X.

Если X - открытое множество, то ∂X не принадлежит X. Если X - замкнутое множество, то ∂X принадлежит X.

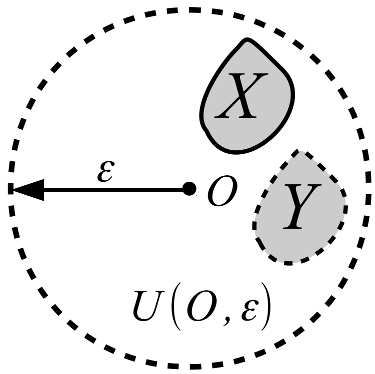
Определение

Множество X называется **ограниченным**, если существует некоторый n-мерный шар $U(O, \varepsilon)$ с центром в начале координат O такой, что $X \subset U(O, \varepsilon)$.

Определение

Множество X называется **компактом**, если оно замкнуто и ограничено.

Пример:



На рисунке множества X и Y находятся внутри $U(O, \varepsilon)$, а значит, они оба ограничены. Поскольку X - замкнутое множество, то X также является компактом. Множество Y открытое, следовательно оно компактом не является.

Определение

Множество X называется **линейно связным**, если любые две точки $x, y \in X$ можно соединить линией (не обязательно прямой), целиком лежащей в X.

Определение

Открытое линейно связное множество называется **областью**.

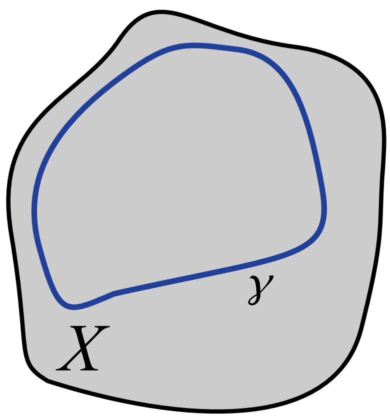
Определение

Замыкание области называется **замкнутой областью**.

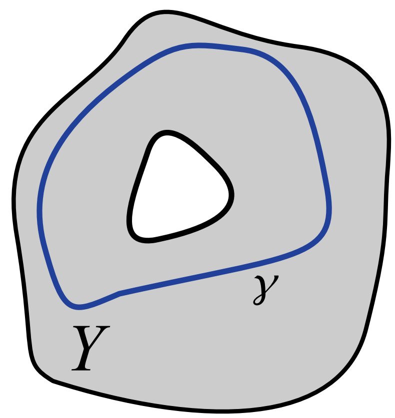
Определение

Линейно связное множество X называется **односвязным**, если любую замкнутую кривую в этом множестве можно стянуть в точку, оставаясь внутри X. В противном случае X называется **многосвязным множеством**.

Пример:



Односвязное множество



Многосвязное множество

На рисунке каждое из множеств X и Y линейно связное, т.к. любые две точки этих множеств можно соединить линией, целиком лежащей в этих же множествах, причем линия может быть любой, а не только прямой. Внутри каждого множества выбрана произвольная замкнутая кривая γ. В множестве X эту кривую можно стянуть в точку, оставаясь внутри X. Следовательно, X - односвязное множество. В множестве Y стянуть кривую γ в точку, не выходя за пределы Y, нельзя. Этому мешает дырка внутри Y (множество точек, не принадлежащих Y и представленных на рисунке в виде белого выреза). Поэтому Y - многосвязное множество.

2 Приближенные вычисления

Пусть необходимо вычислить значение дифференцируемой функции $z = z(x, y)$ в точке (x, y), при этом известно значение функции z в точке (a, b).

Для дифференцируемой функции имеем:

$$\Delta z = \frac{\partial z(a,b)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(a,b)}{\partial y}\Delta y + \circ(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\Delta z = z(x,y) - z(a,b)$, $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$.

Отбросив $\circ(\rho)$, получаем

$$z(x,y) - z(a,b) \approx \frac{\partial z(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial z(a,b)}{\partial y}(y-b)$$

или

$$z(x,y) \approx z(a,b) + \frac{\partial z(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial z(a,b)}{\partial y}(y-b).$$

Последнюю формулу можно использовать для приближенных вычислений значений функции $z = z(x,y)$ в точках, расположенных рядом с точкой (a,b). Чем ближе точка (x,y) к (a,b), тем точнее результат.

3 Частные производные высших порядков

Определение

Частная производная по переменной x_j от функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ называется **частной производной 2-ого порядка** функции $f(x)$ по переменным x_i и x_j.

Обозначение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $f''_{x_i x_j}$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)'_{x_j}$.

Если $i = j$, то частная производная называется **чистой** и вместо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ пишут $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Если $i \neq j$, то частная производная называется **смешанной**.

Теорема (о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования)

Пусть функция $u = f(x)$ имеет в окрестности точки a частные производные 1-ого и 2-ого порядков

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, ..., n,$$

причем частные производные 2-ого порядка непрерывны в точке a. Тогда

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i},$$

т.е. значения частных производных 2-ого порядка в точке a не зависят от последовательности переменных, по которым идет дифференцирование.

Определение

Частной производной n-ого порядка называется частная производная от частной производной $(n-1)$-ого порядка.

Пример: $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)'_{x_i}.$