Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Лекция 4.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Пусть задан числовой промежуток $D \subset R$.

Векторная функция скалярного аргумента

Определение

Пусть задан числовой промежуток $D \subset R$. Если каждому действительному числу $t \in D$ по некоторому правилу поставлен в соответствие определенный геометрический вектор $\vec{r}$, то говорят, что на промежутке D задана **векторная функция скалярного аргумента** или просто **вектор-функция**.

Определение

Пусть задан числовой промежуток $D \subset R$. Если каждому действительному числу $t \in D$ по некоторому правилу поставлен в соответствие определенный геометрический вектор $\vec{r}$, то говорят, что на промежутке D задана **векторная функция скалярного аргумента** или просто **вектор-функция**.

Обозначение: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

Векторная функция скалярного аргумента

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Векторная функция скалярного аргумента

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если $z(t) = 0\ \forall t$, то пишут:

Векторная функция скалярного аргумента

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Если $z(t) = 0\ \forall t$, то пишут:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

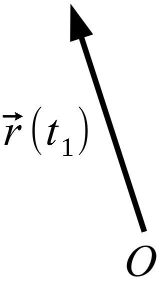
Определение

Пусть все векторы, являющиеся значениями векторной функции $\vec{r}(t)$, приложены к одной точке O.

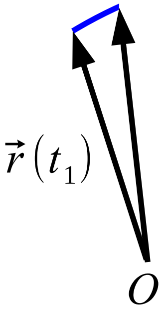
Определение

Пусть все векторы, являющиеся значениями векторной функции $\vec{r}(t)$, приложены к одной точке O. Тогда линия, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{r}(t)$ при непрерывном изменении t, называется **годографом** функции $\vec{r}(t)$.

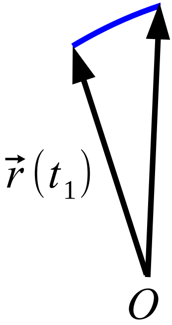
Векторная функция скалярного аргумента



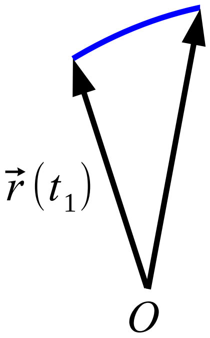
Векторная функция скалярного аргумента



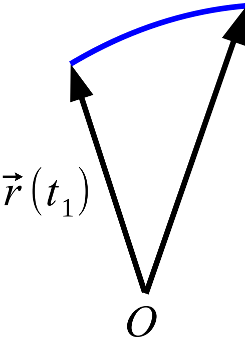
Векторная функция скалярного аргумента



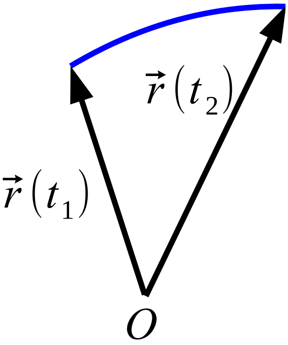
Векторная функция скалярного аргумента



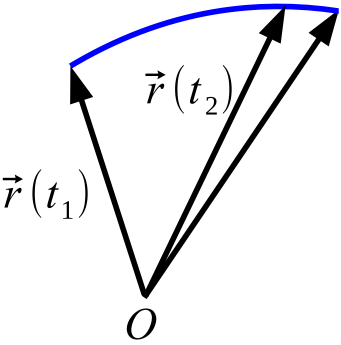
Векторная функция скалярного аргумента



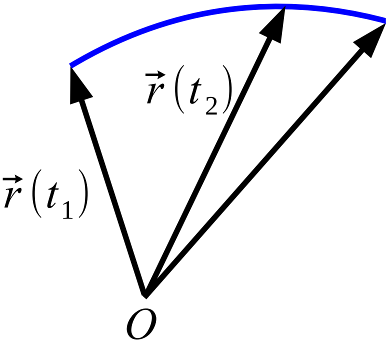
Векторная функция скалярного аргумента



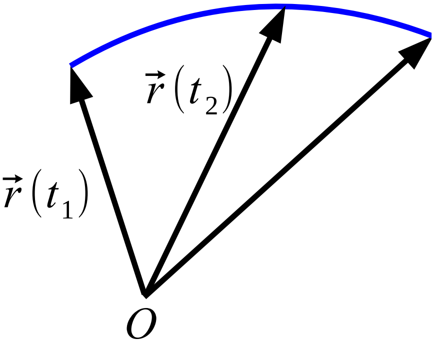
Векторная функция скалярного аргумента



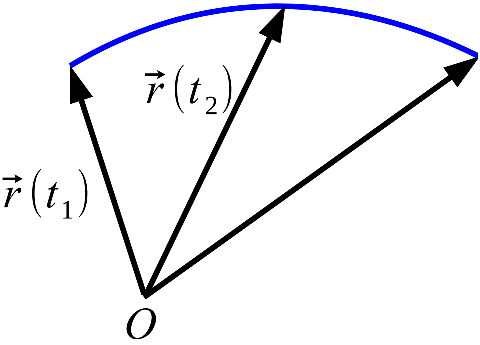
Векторная функция скалярного аргумента



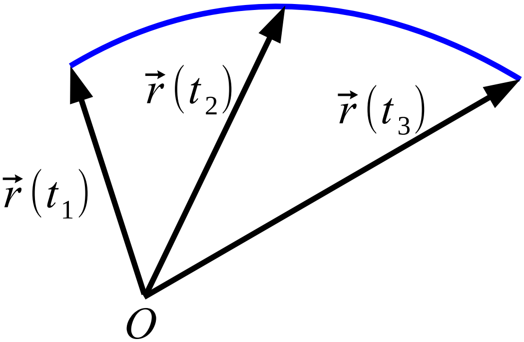
Векторная функция скалярного аргумента



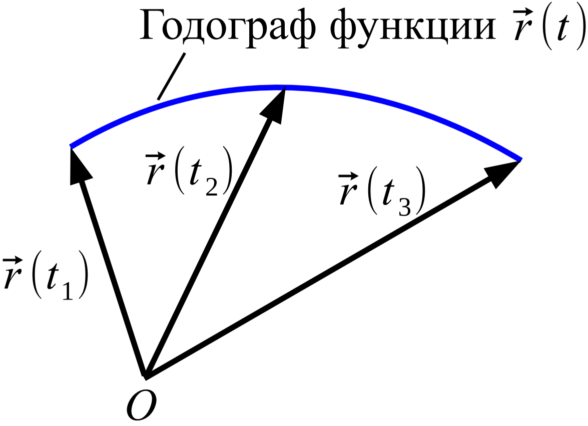
Векторная функция скалярного аргумента



Векторная функция скалярного аргумента



Векторная функция скалярного аргумента



Векторная функция скалярного аргумента

Годограф используется для наглядного представления вектор-функции и выступает аналогом графика обычной числовой функции.

Векторная функция скалярного аргумента

Годограф используется для наглядного представления вектор-функции и выступает аналогом графика обычной числовой функции.

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движения в пространстве материальной точки, положение которой в момент времени t задается вектором $\vec{r}(t)$ относительно точки O.

Расположим начало декартовой системы координат в точке O.

Расположим начало декартовой системы координат в точке O. Тогда в этой системе координат годограф задается системой функций:

Векторная функция скалярного аргумента

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ - в пространстве

Векторная функция скалярного аргумента

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ - в пространстве

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$ - на плоскости,

Векторная функция скалярного аргумента

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{- в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{- на плоскости,}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - координаты векторной функции $\vec{r}(t)$

Предел и непрерывность

Определение

Вектор $\vec{a}$ называется **пределом** векторной функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} \left| \vec{r}(t) - \vec{a} \right| = 0.$$

Предел и непрерывность

Определение

Вектор $\vec{a}$ называется **пределом** векторной функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0.$$

Обозначение:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}.$$

Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ - модуль вектора, Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ - модуль вектора,

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| =$$

Предел и непрерывность

Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ - модуль вектора,

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| =$$

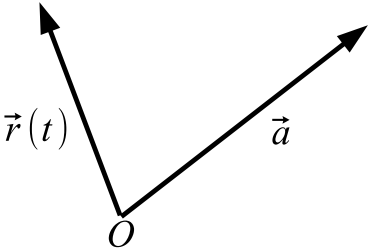
$$= \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2}$$

Предел и непрерывность

При $t \to t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.

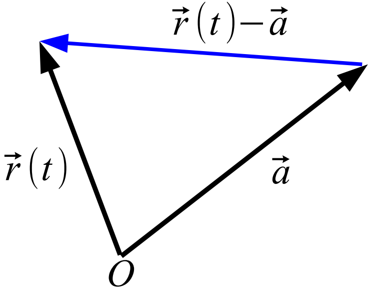
Предел и непрерывность

При $t \to t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.

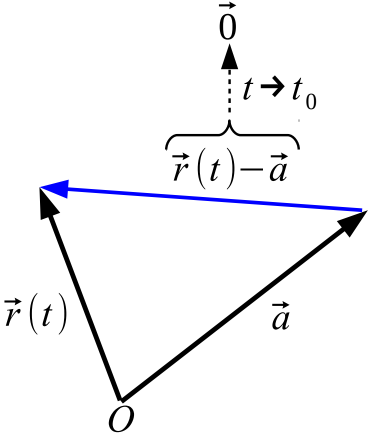


Предел и непрерывность

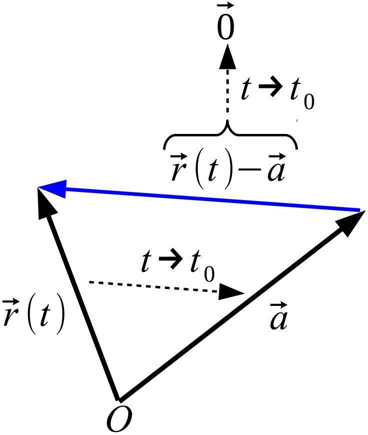
При $t \to t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.



При $t \to t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.



При $t \to t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.



Теорема (о пределе в координатной форме)

Предел и непрерывность

Теорема (о пределе в координатной форме)

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a_x \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = a_y \\ \lim\limits_{t\to t_0} z(t) = a_z \end{array}$$

Определение

Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке t_0, если

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Определение

Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке t_0, если

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Обозначение: $\vec{r}(t) \in C(t_0)$.

Теорема (о непрерывности в координатной форме)

Предел и непрерывность

Теорема (о непрерывности в координатной форме)

$$\vec{r}(t) \in C(t_0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x(t) \in C(t_0) \\ y(t) \in C(t_0) \\ z(t) \in C(t_0) \end{array}$$

Свойства пределов векторных функций:

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,

2) $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_1(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}_2(t)$,

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,

2) $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) + \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$,

3) $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$,

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,

2) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) + \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$,

3) $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$,

4) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$,

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,

2) $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) + \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$,

3) $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$,

4) $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$,

5) $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \times \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$

Предел и непрерывность

Свойства пределов векторных функций:

1) если $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{a}|$,

2) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) + \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$,

3) $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$,

4) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$,

5) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \times \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$

Здесь $\cdot$ - скалярное произведение,

$\times$ - векторное произведение,

$f = f(t)$ - обычная числовая функция.

Производная векторной функции

Производная векторной функции

Определение

Производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

Производная векторной функции

Определение

Производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Производная векторной функции

Определение

Производной функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Обозначение: $\vec{r}\,'(t_0)$.

Теорема (о существовании производной векторной функции)

Производная векторной функции

Теорема (о существовании производной векторной функции)

$$\exists \vec{r}\,'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0),$$

Производная векторной функции

Теорема (о существовании производной векторной функции)

$$\exists \vec{r}\,'(t_0) \Leftrightarrow \exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0),$$

$$\text{причем } \vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

Геометрический смысл производной:

Производная векторной функции

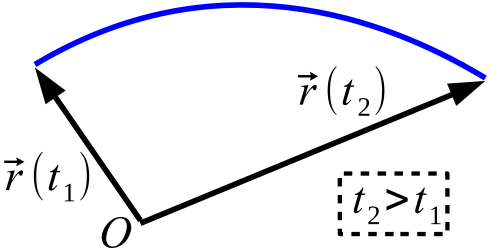
Геометрический смысл производной:

Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t.

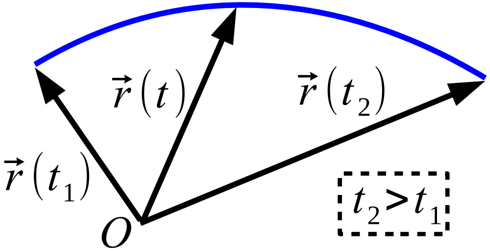
Производная векторной функции

Геометрический смысл производной:

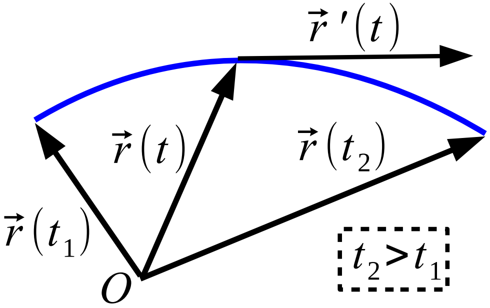
Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t.



Геометрический смысл производной:
Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t.



Геометрический смысл производной:
Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t.



Производная векторной функции

Так как $\vec{r}\,'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$, то уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид:

Производная векторной функции

Так как $\vec{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$, то уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет вид:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

Производная векторной функции

Физический смысл производной:

Производная векторной функции

Физический смысл производной:
Производная $\vec{r}'(t)$ - это вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции $\vec{r}(t)$.

Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

1) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' + \vec{r}_2{}'$

Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

1) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' + \vec{r}_2{}'$

2) $(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}\,'$

Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

1) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' + \vec{r}_2{}'$

2) $(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}\,'$

3) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2{}'$

Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

1) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' + \vec{r}_2{}'$

2) $(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}\,'$

3) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2{}'$

4) $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}'$

Производная векторной функции

Правила дифференцирования:

1) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' + \vec{r}_2{}'$

2) $(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}\,'$

3) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2{}'$

4) $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}'$

Здесь $\cdot$ - скалярное произведение,

$\times$ - векторное произведение,

$f = f(t)$ - обычная числовая функция.

Производная векторной функции

Определение

Дифференциалом вектор-функции $\vec{r}(t)$ называется вектор

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz).$$

Векторная функция постоянной длины

Теорема (о производной векторной функции постоянной длины)

Векторная функция постоянной длины

Теорема (о производной векторной функции постоянной длины)

Если длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна, то он ортогонален своей производной и $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$.

Векторная функция постоянной длины

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O,

Векторная функция постоянной длины

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O, сам же он служит радиус-вектором этой сферы.

Векторная функция постоянной длины

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O, сам же он служит радиус-вектором этой сферы. Производная от этого вектора направлена по касательной к сфере.

Векторная функция постоянной длины

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке O, сам же он служит радиус-вектором этой сферы. Производная от этого вектора направлена по касательной к сфере. На плоскости сфера переходит в круг.