Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Лекция 4.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Формула Тейлора

Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно в окрестности точки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно в окрестности точки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда справедлива **формула Тейлора m-ого порядка**

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a) + \frac{1}{2!}d^2f(a) + \ldots + \\ + \frac{1}{m!}d^mf(a) + r_m.$$

Определение

Многочлен

$$P_m(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a) + \frac{1}{2!}d^2f(a) + \ldots + \\ + \frac{1}{m!}d^mf(a)$$

называется **многочленом Тейлора степени** m.

Определение

Многочлен

$$P_m(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a) + \frac{1}{2!}d^2f(a) + \ldots + \\ + \frac{1}{m!}d^m f(a)$$

называется **многочленом Тейлора степени** m.

Тогда по формуле Тейлора

$$f(x) = P_m(x) + r_m.$$

Определение

Величина $r_m = f(x) - P_m(x)$ называется **остаточным членом** формулы Тейлора.

Остаточный член r_m можно записать в форме Пеано

Остаточный член r_m можно записать в форме Пеано

$$r_m = \circ(\rho^m)$$

Остаточный член r_m можно записать в форме Пеано

$$r_m = \circ(\rho^m), \text{ где } \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} \text{ и } \Delta x_i = x_i - a_i.$$

Формула Тейлора

Формула Тейлора второго порядка функции двух переменных $z = z(x, y)$ имеет вид:

Формула Тейлора второго порядка функции двух переменных $z = z(x, y)$ имеет вид:
$z(x, y) =$

Формула Тейлора второго порядка функции двух переменных $z = z(x, y)$ имеет вид:

$z(x, y) =$

$$= z(a_x, a_y)$$

Формула Тейлора второго порядка функции двух переменных $z = z(x, y)$ имеет вид:

$z(x, y) =$

$$= z(a_x, a_y) + \frac{\partial z(a_x, a_y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(a_x, a_y)}{\partial y}\Delta y +$$

Формула Тейлора второго порядка функции двух переменных $z = z(x, y)$ имеет вид:

$$z(x, y) =$$

$$= z(a_x, a_y) + \frac{\partial z(a_x, a_y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(a_x, a_y)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z(a_x, a_y)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 z(a_x, a_y)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 z(a_x, a_y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right)$$

Формула Тейлора второго порядка функции двух переменных $z = z(x, y)$ имеет вид:

$$z(x, y) =$$

$$= z(a_x, a_y) + \frac{\partial z(a_x, a_y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(a_x, a_y)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z(a_x, a_y)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 z(a_x, a_y)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 z(a_x, a_y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right) + \circ(\rho^2), \rho \to 0,$$

где

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \Delta x = x - a_x, \Delta y = y - a_y.$$

Экстремум

Определение

Точка a называется **точкой строгого максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists U(a)\ \forall x \in U(a),\ x \neq a\colon f(x) < f(a).$$

Определение

Точка a называется **точкой строгого максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists U(a)\ \forall x \in U(a),\ x \neq a\colon f(x) < f(a).$$

Определение

Точка a называется **точкой строгого минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists U(a)\ \forall x \in U(a),\ x \neq a\colon f(x) > f(a).$$

Определение

Точки строгого максимума и минимума называются **точками строгого экстремума**.

Пример:

Экстремум

Пример: Функция двух переменных

$$u = 2e^{-\left((x_1+1)^2+(x_2+2)^2\right)} - 2e^{-\left((x_1-1)^2+(x_2-2)^2\right)}$$

имеет две точки строгого экстремума

Пример: Функция двух переменных

$$u = 2e^{-\left((x_1+1)^2+(x_2+2)^2\right)} - 2e^{-\left((x_1-1)^2+(x_2-2)^2\right)}$$

имеет две точки строгого экстремума:

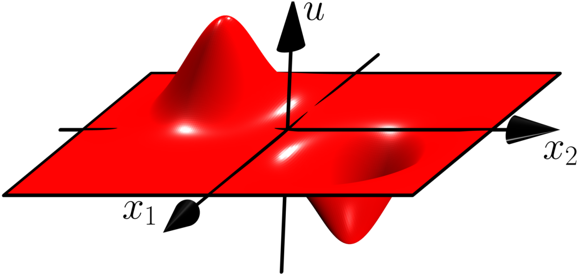
одну точку строгого максимума,

одну точку строгого минимума.

Пример: Функция двух переменных

$$u = 2e^{-\left((x_1+1)^2+(x_2+2)^2\right)} - 2e^{-\left((x_1-1)^2+(x_2-2)^2\right)}$$

имеет две точки строгого экстремума:
одну точку строгого максимума,
одну точку строгого минимума.



Теорема (необходимое условие строгого экстремума)

Экстремум

Теорема (необходимое условие строгого экстремума)

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, и пусть в точке a существуют все ее частные производные первого порядка. Если в точке a функция $f(x)$ имеет строгий экстремум, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю: $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0, i = \overline{1, n}.$

Определение

Точка a называется **стационарной точкой** функции $f(x)$, если функция $f(x)$ дифференцируема в этой точке, и все ее частные производные первого порядка равны нулю в этой точке.

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по второму дифференциалу)

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по второму дифференциалу)
Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки a, которая является стационарной точкой функции $f(x)$.

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по второму дифференциалу)

1) если

$$d^2f(a) > 0 \text{ при } dx_1^2 + ... + dx_n^2 > 0,$$

то a - точка строгого минимума,

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по второму дифференциалу)

1) если

$$d^2f(a) > 0 \text{ при } dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 > 0,$$

то a - точка строгого минимума,

2) если

$$d^2f(a) < 0 \text{ при } dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 > 0,$$

то a - точка строгого максимума,

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по второму дифференциалу)
1) если
$$d^2f(a) > 0 \text{ при } dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 > 0,$$
то a - точка строгого минимума,
2) если
$$d^2f(a) < 0 \text{ при } dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 > 0,$$
то a - точка строгого максимума,
3) если $d^2f(a)$ знакопеременный, то a не является точкой локального экстремума.

Определение

Матрицей Гессе $D^2 f$ называется матрица вторых частных производных функции $f(x)$.

Экстремум

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Определение

Угловыми минорами матрицы Гессе

называются определители вида

Определение

Угловыми минорами матрицы Гессе называются определители вида $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$,

Определение

Угловыми минорами матрицы Гессе называются определители вида $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix},$$

Определение

Угловыми минорами матрицы Гессе называются определители вида $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

Определение

Угловыми минорами матрицы Гессе называются определители вида $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \Delta_n = \det(D^2 f).$$

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки a, которая является стационарной точкой функции $f(x)$.

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Тогда

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Тогда

1) если $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, то

a - точка строгого минимума,

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Тогда

1) если $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, то

a - точка строгого минимума,

2) если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$, то

a - точка строгого максимума,

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Тогда

1) если $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, то

a - точка строгого минимума,

2) если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$, то

a - точка строгого максимума,

3) если $D^2 f$ невырождена и не выполняются условия (1) и (2), то a не является точкой локального экстремума,

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Тогда

4) если $D^2 f$ вырождена, то что-либо о точке a сказать нельзя.

Теорема (достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам)

Тогда

4) если D^2f вырождена, то что-либо о точке a сказать нельзя.

Замечание

D^2f невырождена, если $\det(D^2f) \neq 0$.
D^2f вырождена, если $\det(D^2f) = 0$.

Экстремум

Рассмотрим алгоритм поиска точек экстремума для функции двух переменных $z = z(x, y)$

Экстремум

1. Используя необходимое условие, находим стационарные точки:

1. Используя необходимое условие, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1, M_2, \ldots$$

2. Для каждой стационарной точки составляем матрицу Гессе второго порядка:

2. Для каждой стационарной точки составляем матрицу Гессе второго порядка:

$$D^2 z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

3. Для каждой матрицы Гессе вычисляем угловые миноры:

3. Для каждой матрицы Гессе вычисляем угловые миноры:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

a) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ - точка минимума,

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

а) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ - точка минимума,

б) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ - точка максимума,

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

а) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ - точка минимума,

б) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ - точка максимума,

в) $\Delta_2 < 0$ - точка не является точкой экстремума,

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

а) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ - точка минимума,

б) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ - точка максимума,

в) $\Delta_2 < 0$ - точка не является точкой экстремума,

г) $\Delta_2 = 0$ - что-либо о точке сказать нельзя.

Экстремум

Рассмотрим алгоритм поиска точек экстремума для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$

1. Используя необходимое условие, находим стационарные точки:

Экстремум

1. Используя необходимое условие, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow M_1, M_2, \ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

2. Для каждой стационарной точки составляем матрицу Гессе третьего порядка:

2. Для каждой стационарной точки составляем матрицу Гессе третьего порядка:

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

3. Для каждой матрицы Гессе вычисляем угловые миноры:

3. Для каждой матрицы Гессе вычисляем угловые миноры:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \det(D^2 f)$$

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

а) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ - точка минимума,

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

а) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ - точка минимума,

б) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ - точка максимума,

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

а) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ - точка минимума,

б) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ - точка максимума,

в) $\Delta_3 \neq 0$, но условия (а) и (б) не выполняются - точка не является точкой экстремума,

4. Используя достаточное условие строгого экстремума по угловым минорам, определяем точки локального экстремума:

а) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ - точка минимума,

б) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ - точка максимума,

в) $\Delta_3 \neq 0$, но условия (а) и (б) не выполняются - точка не является точкой экстремума,

г) $\Delta_3 = 0$ - что-либо о точке сказать нельзя.