Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 4. Функции нескольких переменных

Лекция 4.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Производная сложной функции

Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию одной переменной

$$y = f(x(t)),$$

Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию одной переменной

$$y = f(x(t)),$$

в которой простая функция $y = f(x)$ связывает зависимую переменную y с промежуточной переменной x,

Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию одной переменной

$$y = f(x(t)),$$

в которой простая функция $y = f(x)$ связывает зависимую переменную y с промежуточной переменной x, а простая функция $x = x(t)$ связывает промежуточную переменную x с независимой переменной t.

Производная сложной функции

Графически структуру данной функции можно представить в виде схемы зависимостей

$$y \text{ --- } x \text{ --- } t$$

Графически структуру данной функции можно представить в виде схемы зависимостей

$$y \;\text{—}\; x \;\text{—}\; t$$

в которой черточками показаны функциональные зависимости $y = f(x)$ и $x = x(t)$.

Производная сложной функции

Теперь рассмотрим сложную функцию нескольких переменных

$$u = f(x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_k)),$$

Производная сложной функции

Теперь рассмотрим сложную функцию нескольких переменных

$$u = f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k)),$$

где $t_1, \dots, t_k$ - независимые переменные,

$x_1, \dots, x_n$ - промежуточные переменные,

u - зависимая переменная.

Производная сложной функции

Связь между u и $x_1, \ldots, x_n$ задается функцией n переменных

$$u = f(x_1, \ldots, x_n),$$

Производная сложной функции

Связь между u и $x_1, \ldots, x_n$ задается функцией n переменных

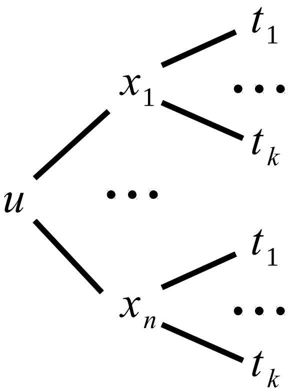
$$u = f(x_1, \ldots, x_n),$$

а зависимость $x_1, \ldots, x_n$ от $t_1, \ldots, t_k$ определяется функциями k переменных

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k), \; i = 1, \ldots, n.$$

Производная сложной функции

Схема зависимостей, отображающая структуру данной функции, имеет следующий вид:



Производная сложной функции

Теорема (производная сложной функции нескольких переменных)

Производная сложной функции

Теорема (производная сложной функции нескольких переменных)
Пусть функции k переменных $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, \ldots, n$ непрерывны в точке $a = (a_1, \ldots, a_k)$ и имеют в ней все свои частные производные первого порядка,

Производная сложной функции

Теорема (производная сложной функции нескольких переменных)
Пусть функции k переменных $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k)$, $i = 1, \ldots, n$ непрерывны в точке $a = (a_1, \ldots, a_k)$ и имеют в ней все свои частные производные первого порядка, а функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $b = (b_1, \ldots, b_n)$, где $b_i = x_i(a_1, \ldots, a_k)$, $i = 1, \ldots, n$.

Производная сложной функции

Теорема (производная сложной функции нескольких переменных)

Тогда в точке a сложная функция

$$u = f(x_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, \dots, t_k))$$

имеет частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j},$$

$$j = 1, 2, \dots, k.$$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

1) $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Частные случаи сложных функций:

1) $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r, dash] & t \\
z \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & y \arrow[r, dash] & t
\end{tikzcd}$$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

1) $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & x \arrow[r] & t \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & y \arrow[r] & t
\end{tikzcd}$$

Производная:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

1) $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:

$$z \begin{array}{l} \diagup \; x \;—\; t \\ \diagdown \; y \;—\; t \end{array}$$

Производная:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

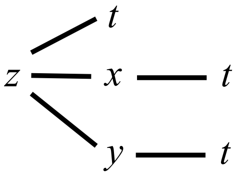
2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:

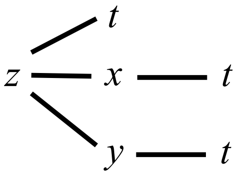


Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:



Производная:

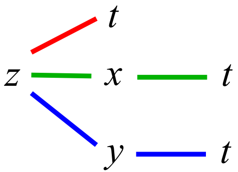
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:



Производная:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Частные случаи сложных функций:

2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Здесь dz/dt называют полной производной функции z по переменной t, которая учитывает, что x и y - это некоторые функции от t,

Частные случаи сложных функций:

2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Здесь dz/dt называют полной производной функции z по переменной t, которая учитывает, что x и y - это некоторые функции от t, а $\partial z/\partial t$ - частной производной функции z по переменной t в предположении, что x и y - это независимые переменные.

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

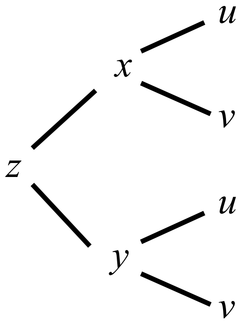
3) $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

3) $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Схема зависимостей:

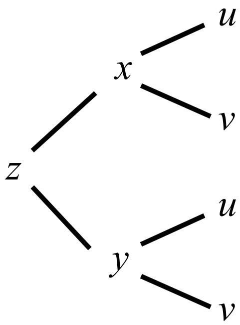


Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

3) $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Схема зависимостей:



Производные:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

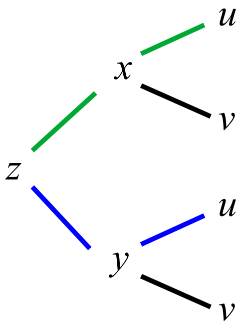
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

3) $z = z(x, y),\ x = x(u, v),\ y = y(u, v)$

Схема зависимостей:



Производные:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

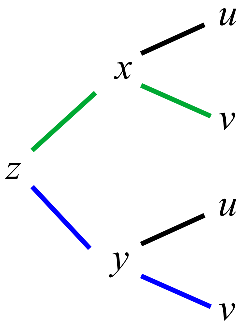
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Производная сложной функции

Частные случаи сложных функций:

3) $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Схема зависимостей:



Производные:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Дифференциал

Дифференциал

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Дифференциал

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Тогда ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0.$$

Определение

Линейная функция

$$A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n$$

переменных $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ называется **дифференциалом** (**полным дифференциалом**, **дифференциалом первого порядка**) функции $f(x)$ в точке a.

Определение

Линейная функция

$$A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n$$

переменных Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n называется **дифференциалом** (**полным дифференциалом**, **дифференциалом первого порядка**) функции $f(x)$ в точке a.

Обозначение: $df(a)$

Дифференциал

Введя обозначения

$$dx_1 = \Delta x_1,\ dx_2 = \Delta x_2,\ \ldots,\ dx_n = \Delta x_n$$

Дифференциал

Введя обозначения

$$dx_1 = \Delta x_1,\ dx_2 = \Delta x_2,\ \ldots,\ dx_n = \Delta x_n$$

и вспомнив из необходимого условия дифференцируемости, что

$$A_1 = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, A_n = \frac{\partial f(a)}{\partial x_n},$$

Дифференциал

Введя обозначения

$$dx_1 = \Delta x_1,\ dx_2 = \Delta x_2,\ \ldots,\ dx_n = \Delta x_n$$

и вспомнив из необходимого условия дифференцируемости, что

$$A_1 = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, A_n = \frac{\partial f(a)}{\partial x_n},$$

получим:

$$df(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} dx_n.$$

Дифференциал

Правила вычисления дифференциала функции нескольких переменных аналогичны правилам вычисления дифференциала функции одной переменной.

Дифференциал

Правила вычисления дифференциала функции нескольких переменных аналогичны правилам вычисления дифференциала функции одной переменной.

Например,

Правила вычисления дифференциала функции нескольких переменных аналогичны правилам вычисления дифференциала функции одной переменной.
Например,
$d(f+g)=df+dg$,

Дифференциал

Правила вычисления дифференциала функции нескольких переменных аналогичны правилам вычисления дифференциала функции одной переменной.

Например,

$d(f+g) = df + dg$,

$d(c \cdot f) = c \cdot df$, где c - константа.

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Рассмотрим сложную функцию $z = z(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Здесь u, v - независимые переменные, x, y - промежуточные переменные.

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$dz =$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Тогда по определению дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right) dv$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Получаем

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Свойство инвариантности означает, что форма дифференциала не зависит от того, для каких переменных (промежуточных или независимых) он выписан.

Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$.

Определение

Дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$.

Обозначение: d^2f

Определение

Дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$.

Обозначение: $d^2f = d(df)$.

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$ функции $f(x)$.

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$ функции $f(x)$.

Обозначение: $d^n f$

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$ функции $f(x)$.

Обозначение: $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал первого порядка:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

дифференциал второго порядка:

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

Дифференциалы высших порядков

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

дифференциал второго порядка:

Частные случаи:

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz.$$

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

d^2z

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$d^2z = d(dz)$

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

Дифференциалы высших порядков

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

Получим выражение второго дифференциала d^2z для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot dy =$$

$$= \left| df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \; f = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } f = \frac{\partial z}{\partial y} \right|$$

Дифференциалы высших порядков

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy =$$

$$= \left| df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,\; f = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } f = \frac{\partial z}{\partial y}\right| =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dy\right)\cdot dx$$

Дифференциалы высших порядков

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy =$$

$$= \left| df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,\; f = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } f = \frac{\partial z}{\partial y} \right| =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dy\right)\cdot dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy\right)\cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot dy \right) \cdot dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot dy \right) \cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dy\right)\cdot dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy\right)\cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dy\right)\cdot dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy\right)\cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot dy \right) \cdot dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot dy \right) \cdot dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dy\right)\cdot dx +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy\right)\cdot dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dy\right)\cdot dx +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy\right)\cdot dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \\ + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy \right) dx + \\ + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right) dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|$$

Дифференциалы высших порядков

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right| =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Задача о полном дифференциале

Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение

$$w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение

$$w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Величина w не всегда является дифференциалом какой-либо функции.

Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение

$$w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Величина w не всегда является дифференциалом какой-либо функции. Рассмотрим условия, при которых w будет дифференциалом функции.

Задача о полном дифференциале

Теорема (необходимое условие полного дифференциала)

Теорема (необходимое условие полного дифференциала)

Если в области D выражение w является полным дифференциалом некоторой функции, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Задача о полном дифференциале

Теорема (достаточное условие полного дифференциала)

Теорема (достаточное условие полного дифференциала)
Если в односвязной области D выполняется условие
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$
то выражение w является полным дифференциалом.