Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

# Математический анализ

## Модуль 4. Функции нескольких переменных

## Лекция 4.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

# Функция нескольких переменных

# Функция нескольких переменных

*Определение*

Множество всевозможных упорядоченных последовательностей $n$ действительных чисел

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

называется **n-мерным точечным арифметическим пространством** $\mathrm{R}^{\mathrm{n}}$.

*Определение*

Элементы множества $R^n$ называются **точками** n-**мерного пространства**.

*Определение*

Элементы множества $R^n$ называются **точками n-мерного пространства**.

Обозначение: $x$

# Функция нескольких переменных

*Определение*

Элементы множества $R^n$ называются **точками n-мерного пространства**.

Обозначение: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

*Определение*

Число $x_i$ называется **i-ой координатой** точки $x$.

*Примеры:*

*Примеры:*

$R^2$ - множество точек двухмерной плоскости,

*Примеры:*

$R^2$ - множество точек двухмерной плоскости,

$R^3$ - множество точек трехмерного пространства

Расстояние между двумя точками
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
обозначается $\rho(x, y)$

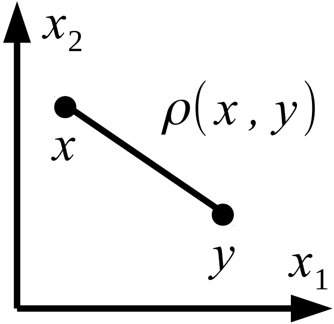
# Функция нескольких переменных

Расстояние между двумя точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ обозначается $\rho(x, y)$ и вычисляется по формуле:

$$\rho(x, y) = \\ = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

*Пример:*

*Пример:*



*Определение*

Пусть задано множество $D \subset R^n$.

## Функция нескольких переменных

*Определение*

Пусть задано множество $D \subset R^n$.

Если каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то говорят, что на множестве $D$ задана **функция n переменных**.

*Определение*

Пусть задано множество $D \subset R^n$.

Если каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то говорят, что на множестве $D$ задана **функция n переменных**.

Обозначение: $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$,

*Определение*

Пусть задано множество $D \subset R^n$.

Если каждой точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ поставлено в соответствие число $u \in R$, то говорят, что на множестве $D$ задана **функция n переменных**.

Обозначение: $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$,

$$u = f(x),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

# Функция нескольких переменных

*Определение*

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются **независимыми** переменными,

*Определение*

Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются **независимыми** переменными,
$u$ - **зависимой**,

# Функция нескольких переменных

*Определение*
Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются **независимыми** переменными,
$u$ - **зависимой**, а множество $D$ - **областью определения** функции $f$.

# Функция нескольких переменных

*Примеры:*

## Функция нескольких переменных

*Примеры:*

1) функция двух переменных

$$u = x_1^2 + x_2^2,$$

*Примеры:*

1) функция двух переменных

$$u = x_1^2 + x_2^2,$$

2) функция трех переменных

$$u = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3.$$

*Определение*

Множество точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = C,$$

где $C$ - некоторая постоянная, называется **множеством уровня** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, соответствующим значению $C$.

*Частные случаи:*

*Частные случаи:*

При $n = 2$ множество уровня называется линией уровня.

*Частные случаи:*
При $n = 2$ множество уровня называется линией уровня.
При $n = 3$ множество уровня называется поверхностью уровня.

*Пример:*

*Пример:* $u = x_1^2 + x_2^2$

# Функция нескольких переменных

*Пример:* $u = x_1^2 + x_2^2$

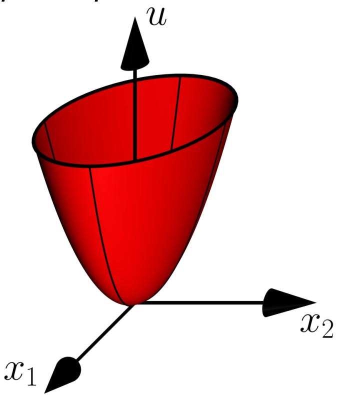



График функции

*Пример:* $u = x_1^2 + x_2^2$

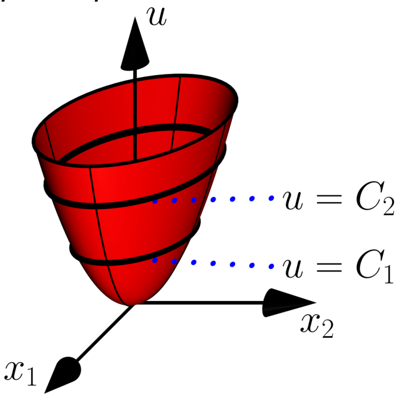
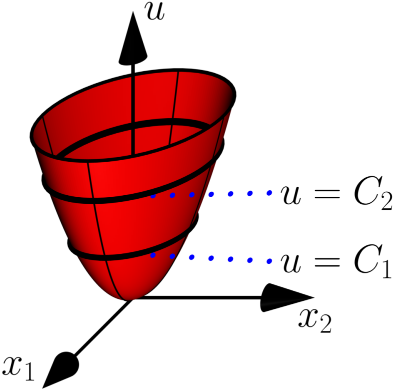



График функции

*Пример:* $u = x_1^2 + x_2^2$



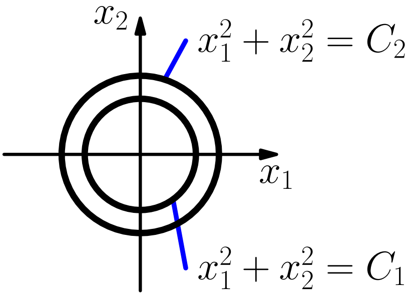




График функции — Линии уровня

# Предел и непрерывность

Пусть дана функция

$$u = f(x),\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

с областью определения $D$.

Пусть дана функция

$$u = f(x),\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

с областью определения $D$.

Предел функции нескольких переменных определяется аналогично пределу функции одной переменной

Пусть дана функция

$$u = f(x),\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

с областью определения $D$.

Предел функции нескольких переменных определяется аналогично пределу функции одной переменной как число, к которому приближается функция $f(x)$, когда ее аргумент $x$ стремится к некоторой точке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

*Определение*
*(в терминах неравенств для конечных точек)*
Конечное число $b$ называется **пределом** функции $f(x)$ при $x \to a$, где $a$ - конечная точка, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in D, 0 < \rho(x, a) < \delta(\varepsilon) : \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ или } \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b.$$

*Определение*
Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $a$, если
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

*Определение*

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на множестве** $X$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Свойства непрерывных функций нескольких переменных аналогичны свойствам непрерывных функций одной переменной. В частности, элементарные функции нескольких переменных непрерывны всюду, где они определены.

*Определение*

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

*Определение*

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$

# Частные производные

# Частные производные

Рассмотрим функцию 2-х переменных $u = f(x_1, x_2)$, которая определена в некоторой окрестности точки $a = (a_1, a_2)$.

# Частные производные

*Определение*

**Частной производной** функции $f(x_1, x_2)$ по переменной $x_1$ в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_1}.$$

*Определение*

**Частной производной** функции $f(x_1, x_2)$ по переменной $x_1$ в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_1}.$$

Обозначение: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$, $f'_{x_1}(a_1, a_2)$, $f'_{x_1}(a)$.

*Определение*

**Частной производной** функции $f(x_1, x_2)$ по переменной $x_2$ в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_2}.$$

*Определение*

**Частной производной** функции $f(x_1, x_2)$ по переменной $x_2$ в точке $a = (a_1, a_2)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + \Delta x_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x_2}.$$

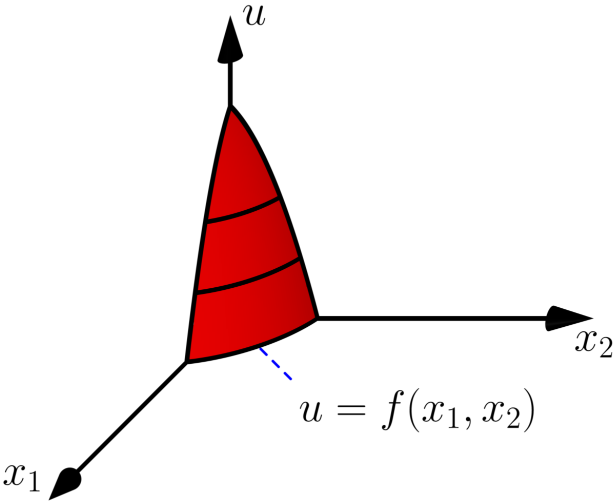
Обозначение: $\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$, $f'_{x_2}(a_1, a_2)$, $f'_{x_2}(a)$.

# Частные производные

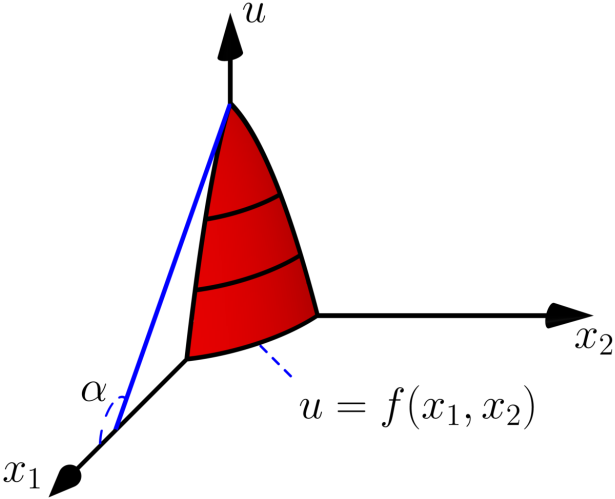
*Геометрическая интерпретация:*

# Частные производные

*Геометрическая интерпретация:*

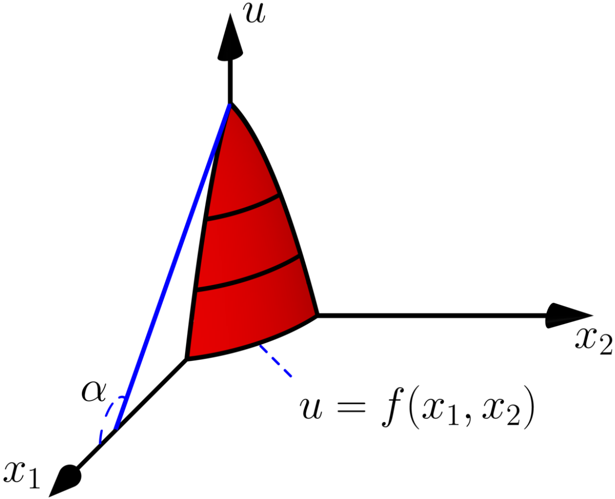


*Геометрическая интерпретация:*



# Частные производные

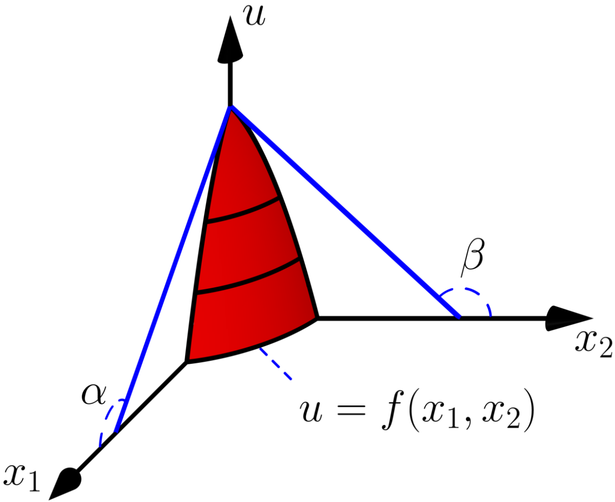
*Геометрическая интерпретация:*




$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

# Частные производные

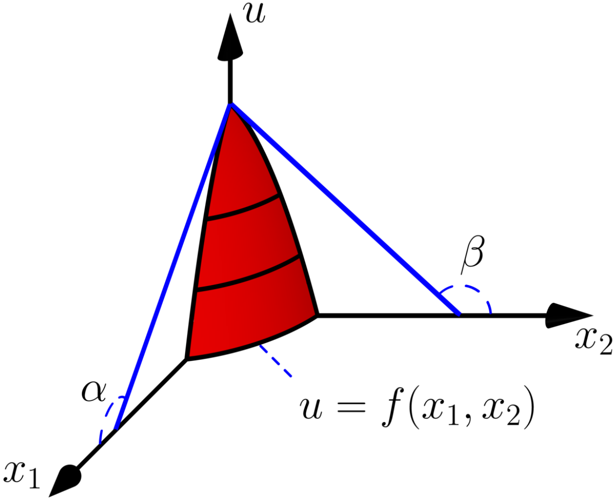
*Геометрическая интерпретация:*




$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

## Частные производные

*Геометрическая интерпретация:*




$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

# Частные производные

$\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $u = f(x_1, x_2)$ в точке $a = (a_1, a_2)$, проведенной в направлении оси $Ox_1$.

# Частные производные

$\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_1}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $u = f(x_1, x_2)$ в точке $a = (a_1, a_2)$, проведенной в направлении оси $Ox_1$.

$\dfrac{\partial f(a_1, a_2)}{\partial x_2}$ – это тангенс угла наклона касательной к графику функции $u = f(x_1, x_2)$ в точке $a = (a_1, a_2)$, проведенной в направлении оси $Ox_2$.

Теперь рассмотрим функцию $n$ переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

*Определение*

**Частной производной** функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ по переменной $x_i$ называется предел

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{\Delta x_i}.$$

# Частные производные

Обозначение:

# Частные производные

Обозначение:

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial x_i}, \; f'_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \; f'_{x_i}(a).$$

Данная частная производная также называется **частной производной первого порядка**.

# Дифференцируемость

# Дифференцируемость

*Определение*

Функция $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **дифференцируемой** в точке $a = (a_1, \ldots, a_n)$, если существуют числа $A_1$, ..., $A_n$, такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0,$$

*Определение*

Функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ называется **дифференцируемой** в точке $a = (a_1, \dots, a_n)$, если существуют числа $A_1, \dots, A_n$, такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \rho \to 0,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$,

*Определение*

Функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ называется **дифференцируемой** в точке $a = (a_1, \dots, a_n)$, если существуют числа $A_1, \dots, A_n$, такие, что

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \rho \to 0,$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$,

$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$ – полное приращение функции.

# Дифференцируемость

*Теорема (необходимое условие дифференцируемости)*

# Дифференцируемость

*Теорема (необходимое условие дифференцируемости)*
Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке $a$, то в этой точке существуют все ее частные производные первого порядка, причем

$$A_1 = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, A_n = \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}.$$

# Дифференцируемость

*Теорема (достаточное условие дифференцируемости)*

*Теорема (достаточное условие дифференцируемости)*
Пусть в некоторой окрестности точки $a$ существуют частные производные первого порядка, которые непрерывны в самой точке $a$. Тогда функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке $a$.

*Теорема (о непрерывности)*

*Теорема (о непрерывности)*
Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в точке $a$, то она непрерывна в ней.

# Дифференцируемость

*Определение*

Функция называется **непрерывно дифференцируемой** в точке $a$, если она имеет в этой точке непрерывные частные производные первого порядка.