# Математический анализ Модуль 4. Функции нескольких переменных
# **Лекция 4.4**

**Аннотация**

Векторная функция скалярного аргумента, ее предел и производная. Векторная функция постоянной длины.

## 1 Векторная функция скалярного аргумента

*Определение*

Пусть задан числовой промежуток $D \subset R$. Если каждому действительному числу $t \in D$ по некоторому правилу поставлен в соответствие определенный геометрический вектор $\vec{r}$, то говорят, что на промежутке $D$ задана **векторная функция скалярного аргумента** или просто **вектор-функция**.

Обозначение: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Векторная функция задается с помощью трех скалярных функций, являющихся ее координатами:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

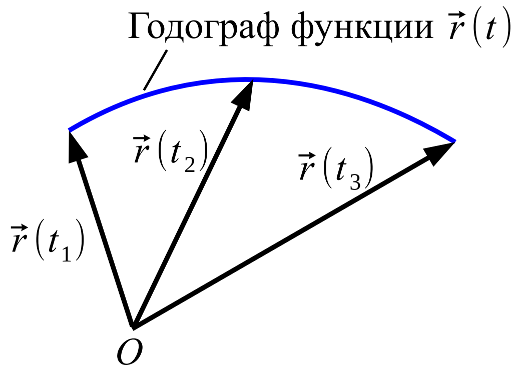
Если $z(t) = 0\ \forall t$, то пишут:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

*Определение*

Пусть все векторы, являющиеся значениями векторной функции $\vec{r}(t)$, приложены к одной точке $O$. Тогда линия, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{r}(t)$ при непрерывном изменении $t$, называется **годографом** функции $\vec{r}(t)$.




Годограф используется для наглядного представления вектор-функции и выступает аналогом графика обычной числовой функции. С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движения в пространстве материальной точки, положение которой в момент времени $t$ задается вектором $\vec{r}(t)$ относительно точки $O$.

Расположим начало декартовой системы координат в точке $O$. Тогда в этой системе координат годограф задается системой функций:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \text{- в пространстве}$$

или

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{- на плоскости,}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - координаты векторной функции $\vec{r}(t)$

# 2 Предел и непрерывность

*Определение*

Вектор $\vec{a}$ называется **пределом** векторной функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0.$$

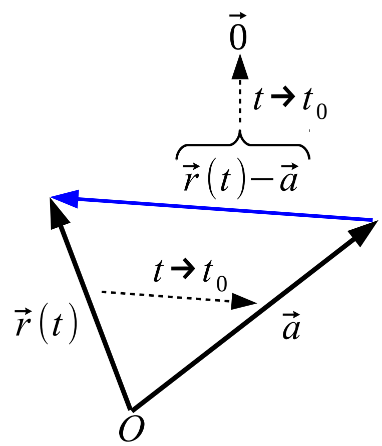
Обозначение:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}.$$

Здесь $|\vec{r}(t) - \vec{a}|$ - модуль вектора,

$$|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - a_x)^2 + (y(t) - a_y)^2 + (z(t) - a_z)^2}.$$

При $t \to t_0$ вектор $\vec{r}(t) - \vec{a}$ переходит в нулевой вектор $\vec{0}$, что соответствует переходу вектора $\vec{r}(t)$ в вектор $\vec{a}$.



*Теорема (о пределе в координатной форме)*

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a_x \\ \lim\limits_{t\to t_0} y(t)=a_y \\ \lim\limits_{t\to t_0} z(t)=a_z \end{array}$$

*Определение*

Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется **непрерывной** в точке $t_0$, если

$$\lim_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0).$$

Обозначение: $\vec{r}(t)\in C(t_0)$.

*Теорема (о непрерывности в координатной форме)*

$$\vec{r}(t)\in C(t_0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x(t)\in C(t_0) \\ y(t)\in C(t_0) \\ z(t)\in C(t_0) \end{array}$$

*Свойства пределов векторных функций:*

1) если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{a}$, то $\lim\limits_{t\to t_0}|\vec{r}(t)|=|\vec{a}|$,

2) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$,

3) $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t)=\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)$,

4) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$,

5) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t))=\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\times\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$

Здесь $\cdot$ - скалярное произведение, $\times$ - векторное произведение, $f=f(t)$ - обычная числовая функция.

# 3 Производная векторной функции

*Определение*

**Производной** функции $\vec{r}(t)$ в точке $t_0$ называется предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Обозначение: $\vec{r}\,'(t_0)$.

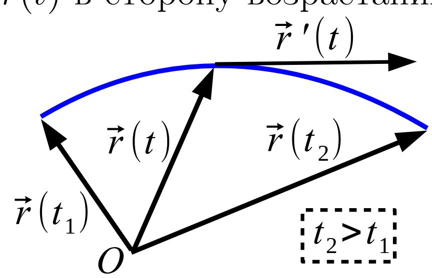
*Теорема (о существовании производной векторной функции)*

$$\exists\vec{r}\,'(t_0)\Leftrightarrow\exists x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0),$$

причем $\vec{r}\,'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

*Геометрический смысл производной:*

Производная $\vec{r}\,'(t)$ - это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра $t$.




Так как $\vec{r}\,'(t)$ направлен по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$, то уравнение касательной к этой кривой в точке $(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ имеет вид:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

*Физический смысл производной:*

Производная $\vec{r}\,'(t)$ - это вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции $\vec{r}(t)$.

*Правила дифференцирования:*

1) $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' + \vec{r}_2{}'$
2) $(f\vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}\,'$
3) $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2{}'$
4) $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}'$

Здесь $\cdot$ - скалярное произведение, $\times$ - векторное произведение, $f = f(t)$ - обычная числовая функция.

*Определение*

**Дифференциалом** вектор-функции $\vec{r}(t)$ называется вектор

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz).$$

# 4 Векторная функция постоянной длины

*Теорема (о производной векторной функции постоянной длины)*

Если длина вектора $\vec{r}(t)$ постоянна, то он ортогонален своей производной и $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$.

Геометрически конец вектора $\vec{r}(t)$ все время лежит на одной и той же сфере с центром в точке $O$, сам же он служит радиус-вектором этой сферы. Производная от этого вектора направлена по касательной к сфере. На плоскости сфера переходит в круг.