Математический анализ
Модуль 4. Функции нескольких переменных
Лекция 4.2

Аннотация

Производная сложной функции (теорема и наиболее распространенные частные случаи). Дифференциал и инвариантность его формы. Дифференциалы высших порядков. Задача о полном дифференциале.

1 Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию одной переменной

$$y = f(x(t)),$$

в которой простая функция $y = f(x)$ связывает зависимую переменную y с промежуточной переменной x, а простая функция $x = x(t)$ связывает промежуточную переменную x с независимой переменной t. Графически структуру данной функции можно представить в виде схемы зависимостей

$$y \text{ --- } x \text{ --- } t$$

в которой черточками показаны функциональные зависимости $y = f(x)$ и $x = x(t)$.

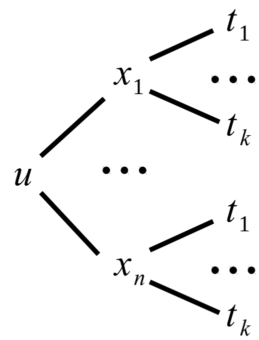
Теперь рассмотрим сложную функцию нескольких переменных

$$u = f(x_1(t_1, ..., t_k), ..., x_n(t_1, ..., t_k)),$$

где $t_1, ..., t_k$ - независимые переменные, $x_1, ..., x_n$ - промежуточные переменные, u - зависимая переменная. Связь между u и $x_1, ..., x_n$ задается функцией n переменных $u = f(x_1, ..., x_n)$, а зависимость $x_1, ..., x_n$ от $t_1, ..., t_k$ определяется функциями k переменных

$$x_i = x_i(t_1, ..., t_k),\ i = 1, ..., n.$$

Схема зависимостей, отображающая структуру данной функции, имеет следующий вид:



Теорема (производная сложной функции нескольких переменных)

Пусть функции k переменных $x_i = x_i(t_1, ..., t_k)$, $i = 1, ..., n$ непрерывны в точке $a = (a_1, ..., a_k)$ и имеют в ней все свои частные производные первого порядка, а функция $u = f(x_1, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $b = (b_1, ..., b_n)$, где $b_i = x_i(a_1, ..., a_k)$, $i = 1, ..., n$. Тогда в точке a сложная функция

$$u = f(x_1(t_1, ..., t_k), ..., x_n(t_1, ..., t_k))$$

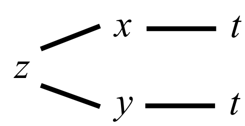
имеет частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j}, j = 1, 2, ..., k.$$

Частные случаи сложных функций:

1) $z = z(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:

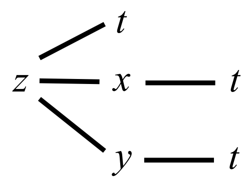


Производная:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

2) $z = z(t, x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$

Схема зависимостей:



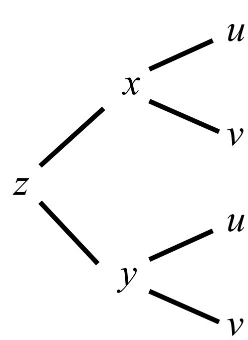
Производная:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Здесь dz/dt называют полной производной функции z по переменной t, которая учитывает, что x и y - это некоторые функции от t, а $\partial z/\partial t$ - частной производной функции z по переменной t в предположении, что x и y - это независимые переменные.

3) $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

Схема зависимостей:



Производные:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

2 Дифференциал

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Тогда ее полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_n\Delta x_n + \circ(\rho), \rho \to 0.$$

Определение

Линейная функция $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_n\Delta x_n$ переменных Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n называется **дифференциалом** (**полным дифференциалом**, **дифференциалом первого порядка**) функции $f(x)$ в точке a.

Обозначение: $df(a)$

Введя обозначения $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, ..., $dx_n = \Delta x_n$ и вспомнив из необходимого условия дифференцируемости, что

$$A_1 = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, ..., A_n = \frac{\partial f(a)}{\partial x_n},$$

получим:

$$df(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}dx_n.$$

Правила вычисления дифференциала функции нескольких переменных аналогичны правилам вычисления дифференциала функции одной переменной. Например, $d(f+g) = df + dg$, $d(c \cdot f) = c \cdot df$, где c - константа.

3 Инвариантность формы дифференциала первого порядка

Рассмотрим сложную функцию $z = z(x, y)$, где $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$. Здесь u, v - независимые переменные, x, y - промежуточные переменные. Тогда по определению дифференциала имеем

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right) dv = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \end{aligned}$$

Получаем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Свойство инвариантности означает, что форма дифференциала не зависит от того, для каких переменных (промежуточных или независимых) он выписан.

4 Дифференциалы высших порядков

Определение

Дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$.

Обозначение: $d^2 f = d(df)$.

Определение

Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$ функции $f(x)$.

Обозначение: $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Частные случаи:

1) $z = z(x, y)$

дифференциал первого порядка:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

2) $u = f(x, y, z)$

дифференциал первого порядка:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

дифференциал второго порядка:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + \\ + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz.$$

Получим выражение второго дифференциала $d^2 z$ для функции 2-х переменных $z = z(x, y)$.

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy =$$

$$= \left| df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \; f = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } f = \frac{\partial z}{\partial y} \right| =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot dy \right) \cdot dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot dy \right) \cdot dy =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \right) dy =$$
$$= \left| \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right| =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

5 Задача о полном дифференциале

Пусть дано выражение $w = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Величина w не всегда является дифференциалом какой-либо функции. Рассмотрим условия, при которых w будет дифференциалом функции.

Теорема (необходимое условие полного дифференциала)

Если в области D выражение w является полным дифференциалом некоторой функции, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Теорема (достаточное условие полного дифференциала)

Если в односвязной области D выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то выражение w является полным дифференциалом.