Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Текст 3.2

Аннотация

Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена. Вычисление пределов по формуле Тейлора.

1 Примеры разложения функций по формуле Маклорена

Разложим по формуле Маклорена некоторые элементарные функции.

1) $y = \sin x$

$f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \sin x \qquad f^{IV}(0) = 0$

$f^{V}(x) = \cos x \qquad f^{V}(0) = 1$

$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n, \\ (-1)^n, & m = 2n+1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, ...$

Тогда по формуле Маклорена имеем:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot 0 \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0 \cdot x^4 +$$
$$+ \frac{1}{5!} \cdot 1 \cdot x^5 + ... + \frac{1}{(2n)!} \cdot 0 \cdot x^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n+1} +$$
$$+ \frac{1}{(2n+2)!} \cdot 0 \cdot x^{2n+2} + \circ(x^{2n+2}) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ(x^{2n+2}), x \to 0.$$

Примеры:
$\sin x = x + \circ(x^2), x \to 0.$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4), x \to 0.$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6), x \to 0.$

2) $y = \cos x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = \cos x$	$f^{IV}(0) = 1$
$f^{V}(x) = -\sin x$	$f^{V}(0) = 0$

$$\Rightarrow f^{(m)}(0) = \begin{cases} 0, & m = 2n+1, \\ (-1)^n, & m = 2n, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Тогда по формуле Маклорена имеем:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ(x^{2n+1}), x \to 0.$$

Примеры:

$\cos x = 1 + \circ(x), x \to 0.$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \circ(x^3), x \to 0.$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \circ(x^5), x \to 0.$

3) $f(x) = e^x$

$f(0) = 1$
$f^{(m)}(x) = e^x$
$f^{(m)}(0) = 1$
$\Rightarrow e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + \circ(x^n), x \to 0.$

4) $f(x) = (1+x)^\alpha$

$f(0) = 1$
$f^{(m)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)(1+x)^{\alpha-m}$
$f^{(m)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-m+1)$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^n + \circ(x^n), x \to 0.$$

Примеры:

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{0.5} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \circ(x^2), x \to 0.$

5) $f(x) = \ln(1+x)$

$f(0) = 0$
$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}\dfrac{(m-1)!}{(1+x)^m}$
$f^{(m)}(0) = (-1)^{m-1}(m-1)!$
$\Rightarrow \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \circ(x^n), x \to 0.$

2 Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Для вычисления пределов вида

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$$

с неопределенностью

$$\left(\frac{0}{0}\right)$$

можно разложить функции $f(x)$ и $g(x)$ по формуле Тейлора в точке c, ограничившись лишь несколькими первыми ненулевыми членами. В результате получаем:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{a(x-c)^n + \circ((x-c)^n)}{b(x-c)^m + \circ((x-c)^m)}.$$

Далее числитель и знаменатель дроби делим на $(x-c)$ в наименьшей из n и m степени и используем формулу

$$\lim_{x\to c}\frac{\circ((x-c)^\alpha)}{(x-c)^\beta} = 0, \text{если } \alpha \geq \beta.$$

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=?$$

Разложим по формуле Тейлора функции, входящие в искомое выражение:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3), x\to 0,$$
$$e^{-x}=1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\circ(x^3), x\to 0,$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\circ(x^4), x\to 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3)}^{e^x}\overbrace{-1+x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}-\circ(x^3)}^{-e^{-x}}-2x}{x\underbrace{-x+\frac{x^3}{3!}-\circ(x^4)}_{-\sin x}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\circ(x^n)-\circ(x^n)=\circ(x^n),\\ -\circ(x^n)=\circ(x^n).\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)}{\frac{x^3}{6}+\circ(x^4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}+\frac{\circ(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6}+\frac{\circ(x^4)}{x^3}}=\frac{\frac{1}{3}+0}{\frac{1}{6}+0}=2.$$