Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Текст 3.1

Аннотация

Производные основных элементарных функций. Правила нахождения производных. Правила вычисления дифференциала. Приближенные вычисления значений функции с помощью дифференциала. Инвариантность формы дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Физический смысл первой и второй производных.

1 Вычисление производных

Таблица производных основных элементарных функций:

1) $c' = 0$, $c - const$,
2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
3) $(a^x)' = a^x \ln a$,
4) $(e^x)' = e^x$,
5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
6) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,
7) $(\sin x)' = \cos x$,
8) $(\cos x)' = -\sin x$,
9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
10) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Вывод формулы №3: $(a^x)' = a^x \ln a$

$f(x) = a^x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= \left| \lim_{u \to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a - \begin{array}{l} \text{следствие 3} \\ \text{второго замечательного предела} \end{array} \right| =$$

$$= a^x \ln a. \blacksquare$$

Вывод формулы №7: $(\sin x)' = \cos x$

$f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin \Delta x/2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\Delta x/2) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x/2}{\Delta x/2} =$$

$$= \left| \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1 - \text{первый замечательный предел} \right| =$$

$$= \cos(x + 0/2) \cdot 1 = \cos x. \blacksquare$$

Правила нахождения производных, связанные с арифметическими действиями над функциями:

1) $(cu)' = c \cdot u'$, $c - const$,
2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
3) $(uv)' = u'v + uv'$,
4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Вывод формулы №2: $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$$f(x) = u(x) \pm v(x),$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x+\Delta x) - u(x)) \pm (v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u' \pm v'. \blacksquare$$

Вывод формулы №3: $(uv)' = u'v + uv'$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u,$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x) \Rightarrow v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v,$$

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) =$$

$$= u(x+\Delta x) \cdot v(x+\Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= (u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta u \cdot \Delta v,$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v(x) + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v) =$$

$$= u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v =$$

$$= uv' + u'v + u' \cdot 0 = uv' + u'v. \blacksquare$$

Производная обратной функции:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Вывод формулы:

$$(f^{-1}(y_0))' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacksquare$$

Производная сложной функции

Если $f(x) = v(u(x))$ - сложная функция, образованная путем композиции функций $u(x)$ и $v(u)$, а также существуют $u'(x_0)$ и $v'(u_0)$, где $u_0 = u(x_0)$, то $f'(x_0) = v'(u_0) \cdot u'(x_0)$.

Примеры:

1. Найти производную сложной функции $f(x) = \ln(3x^2 + 5)$.

Разложим данную сложную функцию на составляющие ее простые функции $u(x)$, $v(u)$ и найдем их производные:

$u(x) = 3x^2 + 5, \quad u'(x) = 6x,$

$v(u) = \ln u, \qquad v'(u) = 1/u.$

Далее формируем производную сложной функции $f'(x)$ как произведение найденных производных простых функций $v'(u)$ и $u'(x)$:

$$f'(x) = v' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot 6x = \frac{1}{3x^2 + 5} \cdot 6x = \frac{6x}{3x^2 + 5}.$$

2. Найти производную сложной функции $f(x) = (1 + 2x^5)^{15}$.

Разложим данную сложную функцию на составляющие ее простые функции $u(x)$, $v(u)$ и найдем их производные:

$u(x) = 1 + 2x^5, \quad u'(x) = 10x^4,$

$v(u) = u^{15}, \qquad v'(u) = 15u^{14}.$

Далее формируем производную сложной функции $f'(x)$ как произведение найденных производных простых функций $v'(u)$ и $u'(x)$:

$$f'(x) = v' \cdot u' = 15u^{14} \cdot 10x^4 = 15(1+2x^5)^{14} \cdot 10x^4 = 150x^4(1+2x^5)^{14}.$$

2 Свойства дифференциала

Правила вычисления дифференциала:

1. $d(u+v) = du + dv$.
2. $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$.
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, v \neq 0$.

Приближенные вычисления функции с помощью дифференциала

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$
или
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$$
Выразим отсюда $f(x_0 + \Delta x)$:
$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$
и отбросим $\circ(\Delta x)$:
$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Последняя формула позволяет приближенно вычислять значения дифференцируемой функции $f(x)$, причем тем точнее, чем меньше Δx.

Пример: Вычислить значение функции $f(x) = \ln x$ в точке $x = 1.1$.

Представим $x = 1.1$ в виде $x = x_0 + \Delta x$, где $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$, и найдем $f'(x) = 1/x$ и $f'(x_0) = 1$. Тогда согласно последней формуле
$$\underbrace{\ln 1.1}_{f(x_0+\Delta x)} \approx \underbrace{\ln 1}_{f(x_0)} + \underbrace{1}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{0.1}_{\Delta x} = 0 + 0.1 = 0.1.$$
Точное значение: $\ln 1.1 = 0.09531$.

Инвариантность формы дифференциала

Пусть $f(x) = v(u(x))$ - сложная функция, образованная путем композиции функций $u(x)$ и $v(u)$, и существуют $u'(x_0)$ и $v'(u_0)$, где $u_0 = u(x_0)$. Тогда согласно правилу вычисления производной сложной функции

$$df(x_0) = f'(x_0)dx = v'(u_0)\underbrace{u'(x_0)dx}_{du(x_0)=du} = v'(u_0)du.$$

Дифференциал df выглядит одинаково, независимо от того, по какой переменной (независимой x или промежуточной u) он считается.

3 Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$.

Обозначение: $f''(x) = (f'(x))'$

Определение

Дифференциалом второго порядка функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка $df(x_0)$.

Обозначение: $d^2f(x_0) = d(df(x_0)) = f''(x_0)dx^2$.

Определение

Производной n-ого порядка функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-ого порядка функции $f(x)$.

Обозначение: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

На практике используют два эквивалентных способа обозначения производных высших порядков:

$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), ...$

$f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^{V}(x), ...$

Определение

Дифференциалом n-ого порядка функции $f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка функции $f(x)$.

Обозначение: $d^nf(x_0) = d(d^{n-1}f(x_0)) = f^{(n)}(x_0)dx^n$.

4 Физический смысл первой и второй производных

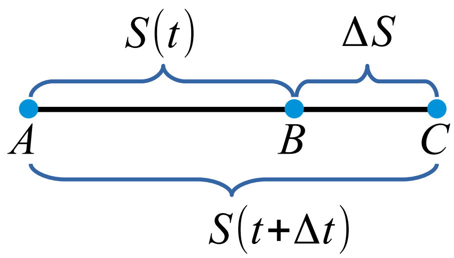
Физический смысл первой производной

Пусть $S(t)$ - длина пути, пройденного телом к моменту времени t. Тогда за время Δt на временном промежутке $[t, t+\Delta t]$ тело пройдет расстояние

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$$

со средней скоростью

$$V_{sr} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$



Мгновенная скорость движения тела в момент времени t есть

$$V = \lim_{\Delta t\to 0} V_{sr} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'.$$

Таким образом, физический смысл производной заключается в том, что производная от длины пути, пройденного телом, есть мгновенная скорость движения тела вдоль данного пути.

Физический смысл второй производной

Ускорение a определяется как быстрота изменения скорости V тела, которая, в свою очередь, есть быстрота изменения длины S пути, пройденного телом. Поэтому

$$a = V' = (S')' = S'',$$

т.е. физический смысл второй производной состоит в том, что вторая производная от длины пути, пройденного телом, есть ускорение движения тела.