Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 3.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Условия существования экстремума

Теорема (необходимое условие экстремума)

Условия существования экстремума

Теорема (необходимое условие экстремума)
Если точка c является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.

Условия существования экстремума

Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет гладкий экстремум.

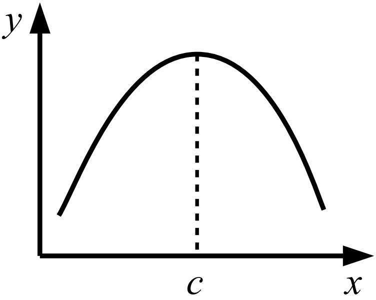
Условия существования экстремума

Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет гладкий экстремум. Если $f'(c)$ не существует, то в точке c функция имеет острый экстремум.

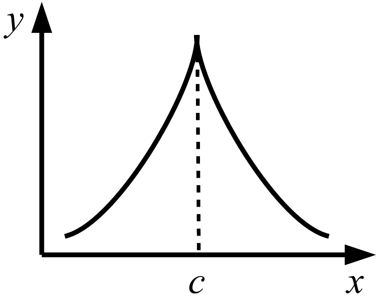
Примеры:

Примеры:

Гладкий экстремум



Острый экстремум



Условия существования экстремума

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)**

Условия существования экстремума

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)**

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, кроме, быть может, самой точки c, в которой она является непрерывной.

Условия существования экстремума

*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)**

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, кроме, быть может, самой точки c, в которой она является непрерывной. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку c, то точка c является точкой строгого экстремума.

Условия существования экстремума

Доказательство

Условия существования экстремума

Доказательство

Рассмотрим случай

$$f'(x) > 0 \text{ для } x < c \text{ и } f'(x) < 0 \text{ для } x > c.$$

Доказательство

Рассмотрим случай

$$f'(x) > 0 \text{ для } x < c \text{ и } f'(x) < 0 \text{ для } x > c.$$

По теореме Лагранжа

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c),$$

где число ξ лежит на интервале

с концами x и c.

Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.
$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$,

Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.
$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.
$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.
Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.

Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.

$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$,

Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.
$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.
Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.
$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

Условия существования экстремума

$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.

$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.

$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

$\Rightarrow c$ - точка строгого локального максимума.

Условия существования экстремума

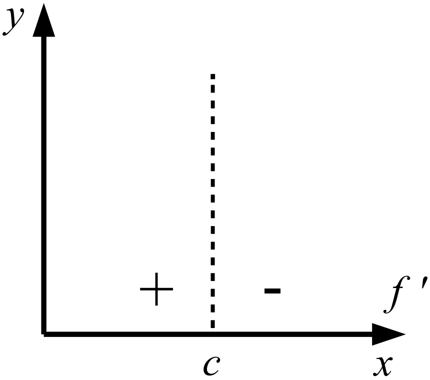
$$f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$$

Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0$.
$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.
Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0$.
$\Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.
$\Rightarrow c$ - точка строгого локального максимума.
Случай локального минимума рассматривается аналогично. $\blacksquare$

Условия существования экстремума

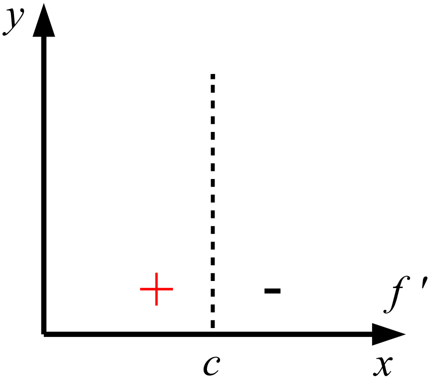
Примеры:

Примеры:

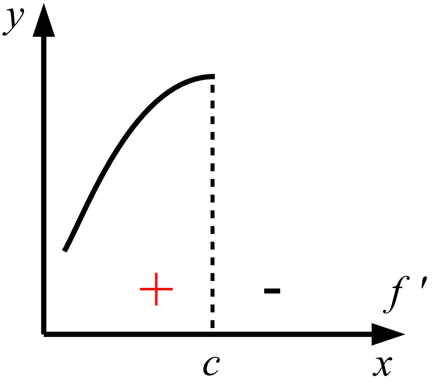


Условия существования экстремума

Примеры:

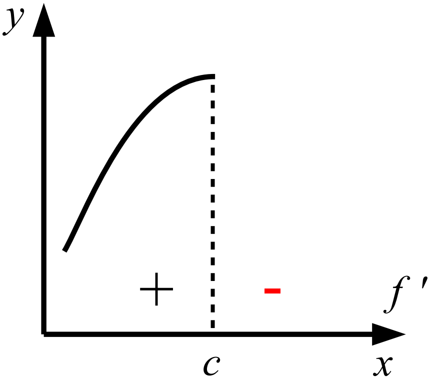


Примеры:



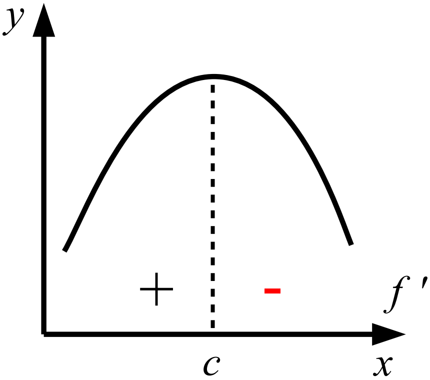
Условия существования экстремума

Примеры:



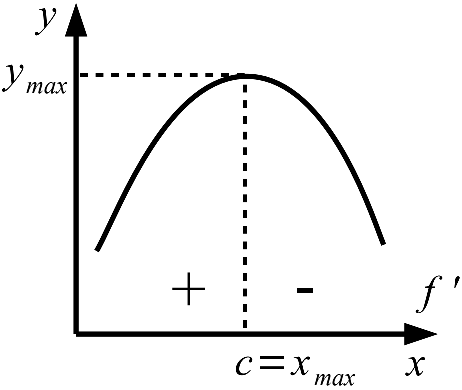
Условия существования экстремума

Примеры:



Условия существования экстремума

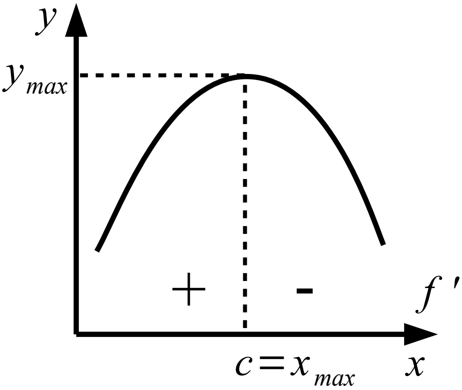
Примеры:

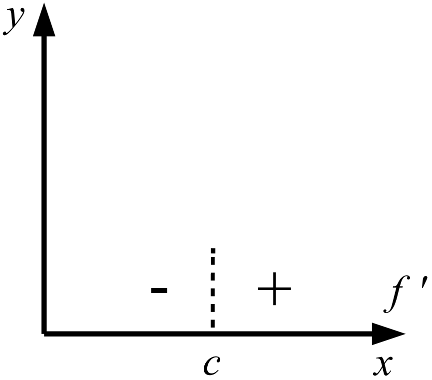


Строгий локальный
максимум

Условия существования экстремума

Примеры:



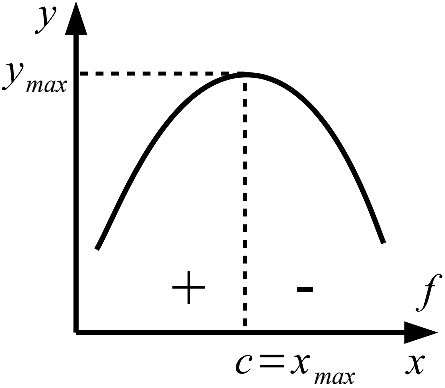


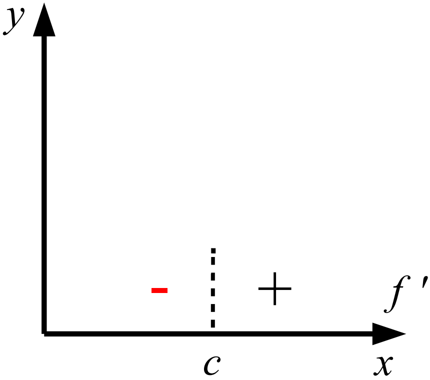
Строгий локальный

максимум

Условия существования экстремума

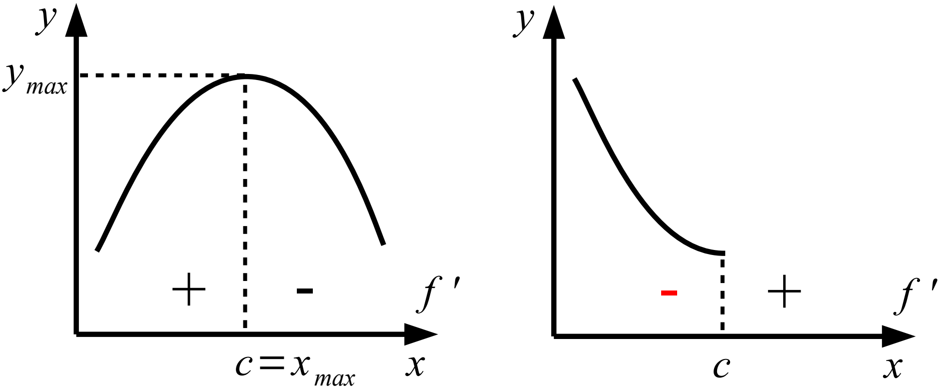
Примеры:





Строгий локальный максимум

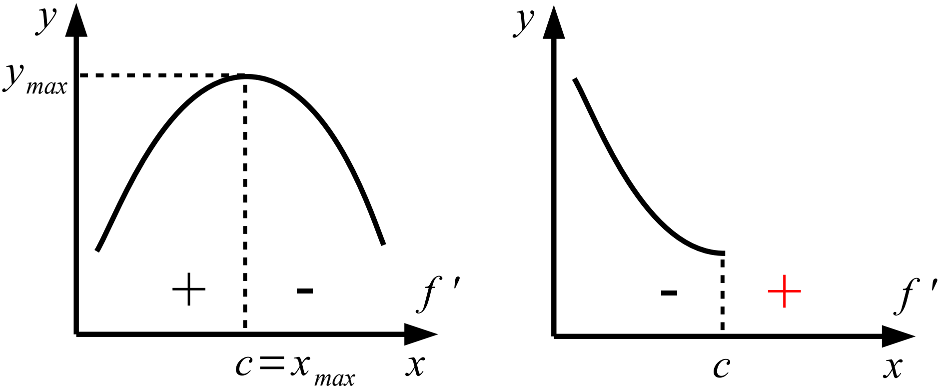
Примеры:



Строгий локальный максимум

Условия существования экстремума

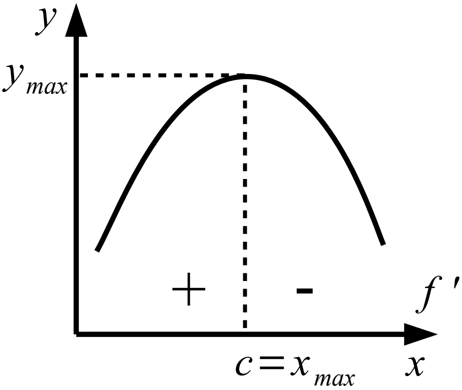
Примеры:

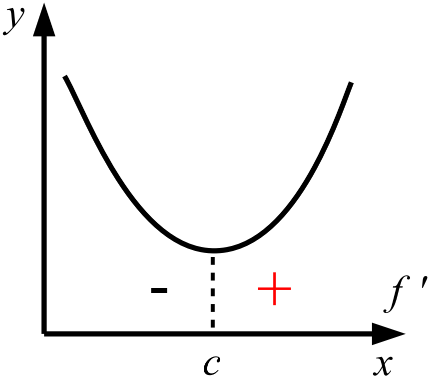


Строгий локальный максимум

Условия существования экстремума

Примеры:

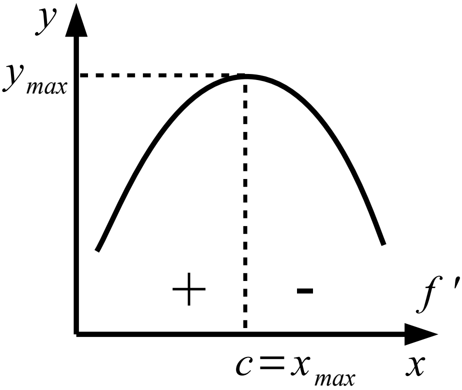


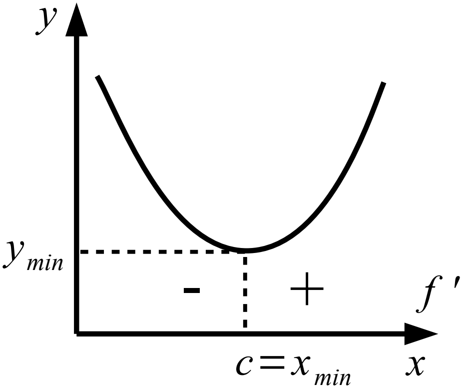


Строгий локальный
максимум

Условия существования экстремума

Примеры:





Строгий локальный максимум

Строгий локальный минимум

Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$.

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$.

Если

$$f''(c) < 0,$$

то c - точка строгого локального максимума.

Условия существования экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$.

Если

$$f''(c) < 0,$$

то c - точка строгого локального максимума.

Если

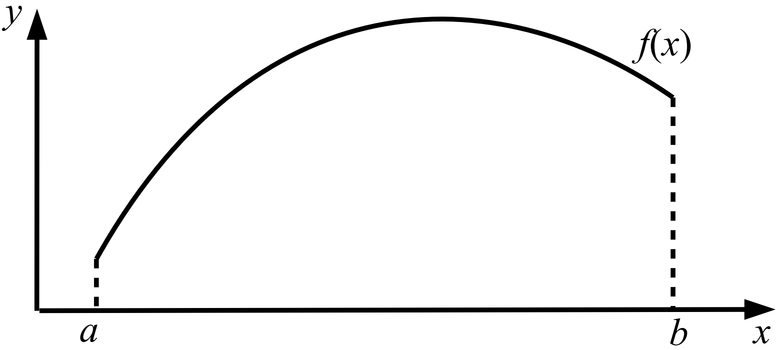
$$f''(c) > 0,$$

то c - точка строгого локального минимума.

Выпуклость функции

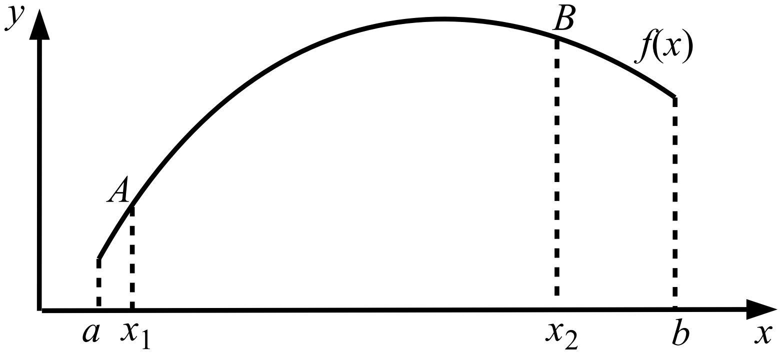
Выпуклость функции

Выпуклость функции



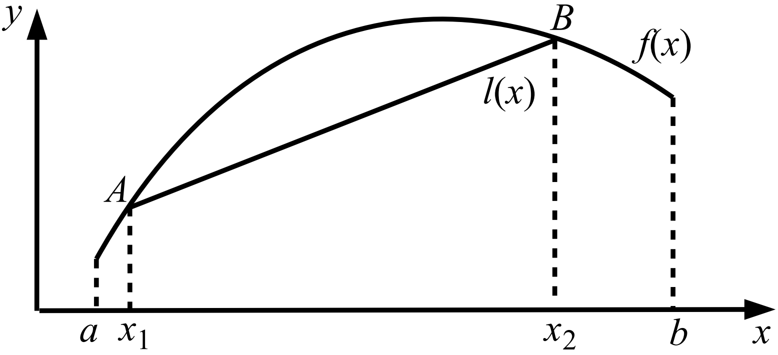
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b).

Выпуклость функции



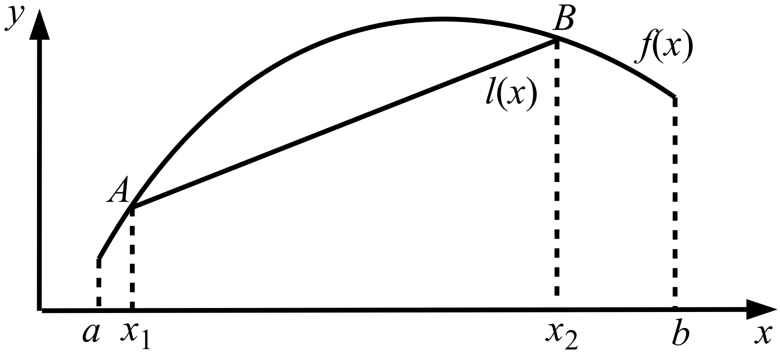
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Выберем на графике этой функции произвольные точки A с координатой x_1 и B с координатой x_2.

Выпуклость функции



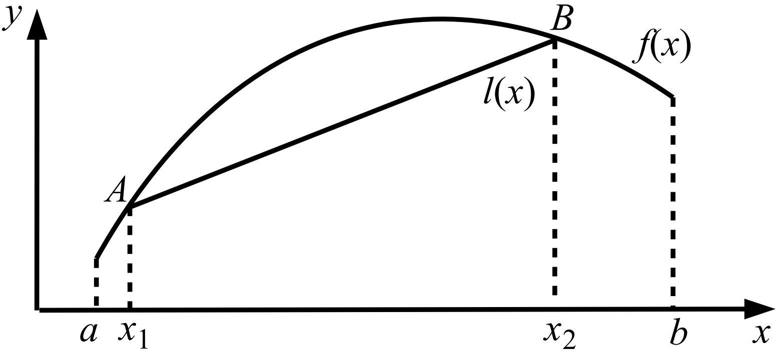
Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением $y = l(x)$,

Выпуклость функции



Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением $y = l(x)$, где $x_1 \le x \le x_2$

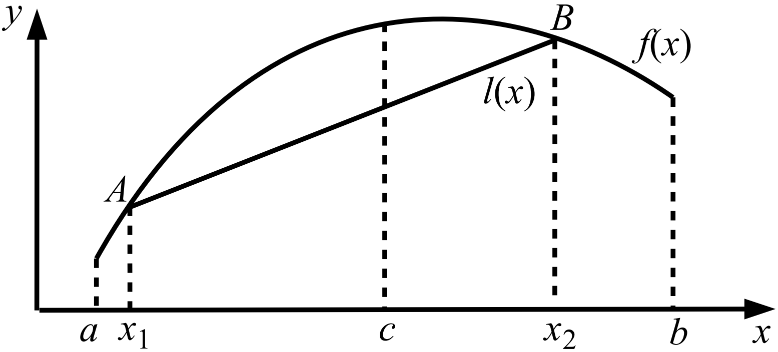
Выпуклость функции



Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением $y = l(x)$, где $x_1 \leq x \leq x_2$ и

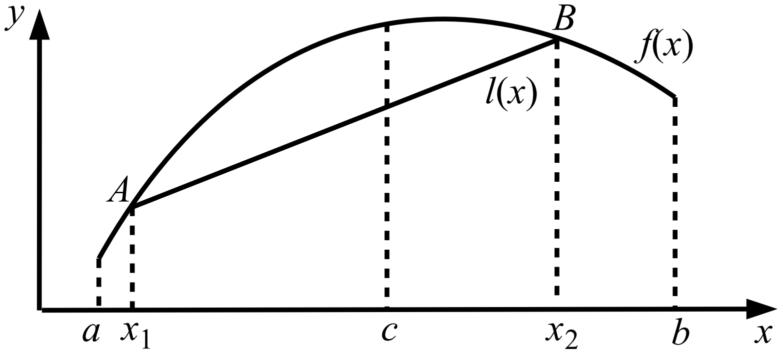
$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Выпуклость функции



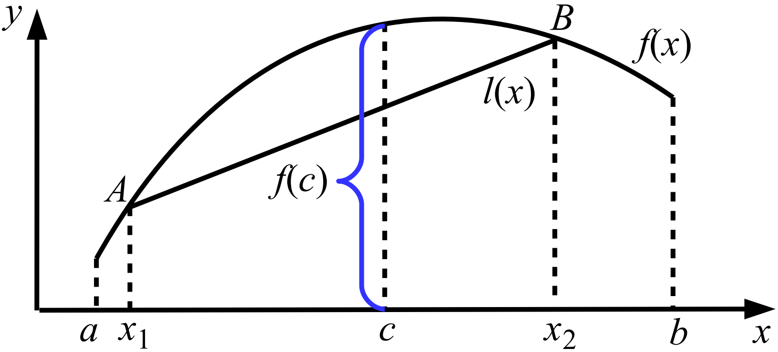
На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c.

Выпуклость функции



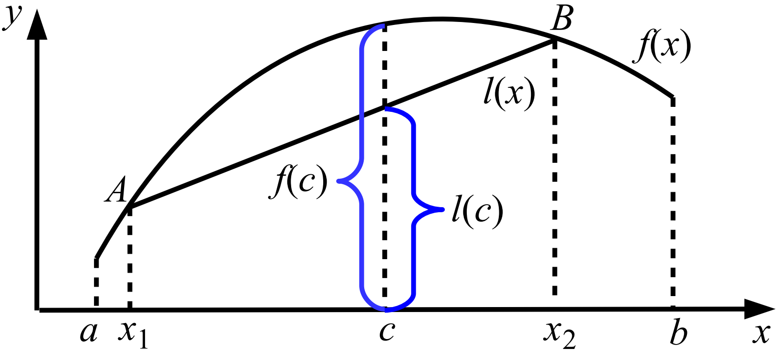
На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c. В данной точке:

Выпуклость функции



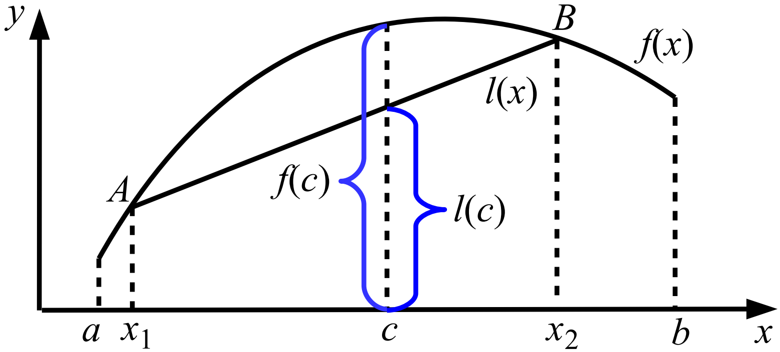
На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c. В данной точке: $f(c)$ - это расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$,

Выпуклость функции



На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c. В данной точке: $f(c)$ - это расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$, а $l(c)$ - расстояние от оси Ox до отрезка AB.

Выпуклость функции

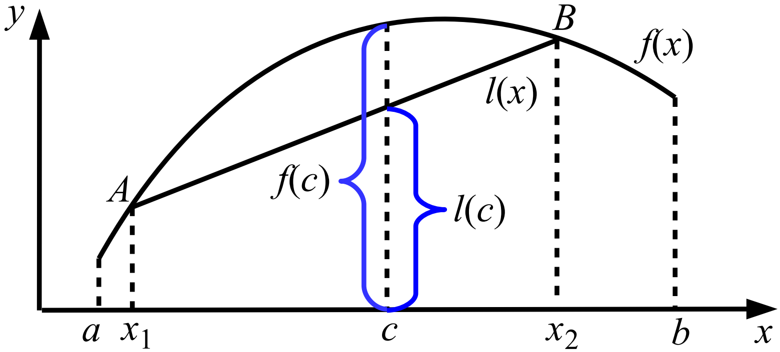


Определение

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх** на (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ и

$$\forall c \in (x_1, x_2)\colon l(c) \leq f(c).$$

Выпуклость функции



Определение

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз** на (a, b), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ и

$$\forall c \in (x_1, x_2)\colon\ l(c) \geq f(c).$$

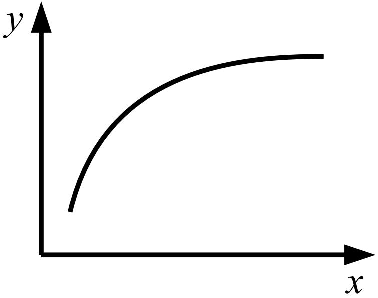
Выпуклость функции

Примеры:

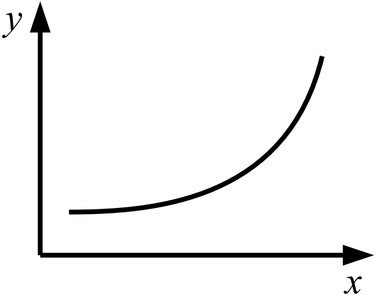
Выпуклость функции

Примеры:

Выпуклость вверх



Выпуклость вниз



Выпуклость функции

*Теорема (достаточное условие выпуклости)**

Выпуклость функции

*Теорема (достаточное условие выпуклости)**
Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$.

*Теорема (достаточное условие выпуклости)**
Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b)$

*Теорема (достаточное условие выпуклости)**

Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b)$

1) $f''(x) \leq 0$, то $f(x)$ выпукла вверх,

Выпуклость функции

*Теорема (достаточное условие выпуклости)**

Пусть $f(x) \in D^2(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b)$

1) $f''(x) \leq 0$, то $f(x)$ выпукла вверх,

2) $f''(x) \geq 0$, то $f(x)$ выпукла вниз.

Выпуклость функции

Доказательство

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$.

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$l(x) - f(x)$

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$l(x) - f(x) =$

$$= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} -$$

$$- f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$l(x) - f(x) =$$

$$= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} -$$

$$- f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Выпуклость функции

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$l(x) - f(x) =$$

$$= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} -$$

$$- f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$l(x) - f(x) =$$

$$= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} -$$

$$- f(x)\underbrace{\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1}}_{=1}$$

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$l(x) - f(x) =$

$$= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} -$$

$$- f(x)\underbrace{\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1}}_{=1} =$$

Выпуклость функции

$=$

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Выпуклость функции

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right|$$

Выпуклость функции

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Выпуклость функции

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Выпуклость функции

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

$$=\frac{(f(x_2)-f(x))(x-x_1)-(f(x)-f(x_1))(x_2-x)}{x_2-x_1}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{по теореме Лагранжа}\\ f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),a<c<b\end{array}\right|=$$

$$=\frac{f'(\eta)(x_2-x)(x-x_1)-f'(\xi)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}=$$

Выпуклость функции

$=$

Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}$$

Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right|$$

Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Выпуклость функции

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{по теореме Лагранжа} \\ f'(b) - f'(a) = f''(c)(b - a), a < c < b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.

Поэтому

$(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0.$

Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$,

Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$, $l(x) \leq f(x)$.

Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$, $l(x) \leq f(x)$.
$\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.

Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$, $l(x) \leq f(x)$.

$\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.

Если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) - f(x) \geq 0$,

Выпуклость функции

Если $f''(\zeta) \leq 0$, то $l(x) - f(x) \leq 0$, $l(x) \leq f(x)$.

$\Rightarrow f(x)$ выпукла вверх.

Если $f''(\zeta) \geq 0$, то $l(x) - f(x) \geq 0$, $l(x) \geq f(x)$.

Выпуклость функции

$$\text{Если } f''(\zeta) \le 0, \text{ то } l(x) - f(x) \le 0,\ l(x) \le f(x).$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ выпукла вверх.}$$

$$\text{Если } f''(\zeta) \ge 0, \text{ то } l(x) - f(x) \ge 0,\ l(x) \ge f(x).$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ выпукла вниз.}$$

■

Выпуклость функции

Определение

Пусть $f(x) \in D(c)$ и $y = L(x)$ - уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c.

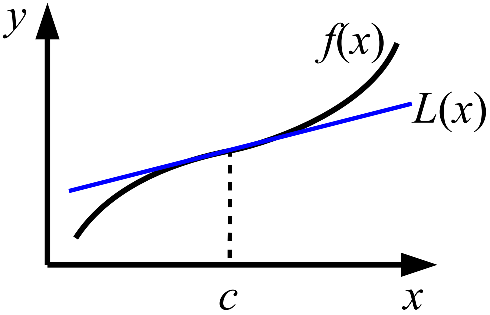
Выпуклость функции

Определение
Пусть $f(x) \in D(c)$ и $y = L(x)$ - уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c. Если $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку c, то c называется **точкой перегиба** функции $f(x)$.

Поведение функции в окрестности точки перегиба:

Выпуклость функции

Поведение функции в окрестности точки перегиба:



*Теорема (необходимое условие перегиба)**

*Теорема (необходимое условие перегиба)**
Если в точке перегиба существует вторая производная, то она равна нулю.

Выпуклость функции

Доказательство

Доказательство

Пусть в точке c существует вторая производная $f''(c)$,

Доказательство

Пусть в точке c существует вторая производная $f''(c)$, и $y = L(x)$ - уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c.

Доказательство

Пусть в точке c существует вторая производная $f''(c)$, и $y = L(x)$ - уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c. Тогда

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

Выпуклость функции

По формуле Тейлора второго порядка имеем:

По формуле Тейлора второго порядка имеем:

$$f(x) =$$
$$f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2+\circ((x-c)^2)$$

По формуле Тейлора второго порядка имеем:

$$f(x) = f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2+\circ((x-c)^2) =$$

$$= L(x)+\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2+\circ((x-c)^2).$$

По формуле Тейлора второго порядка имеем:

$$f(x) =$$

$$f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2+\circ((x-c)^2) =$$

$$= L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \circ((x-c)^2).$$

Выпуклость функции

По формуле Тейлора второго порядка имеем:

$$f(x) =$$

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \circ((x-c)^2) =$$

$$= L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \circ((x-c)^2).$$

$$\Rightarrow f(x) - L(x) = \frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2 + \circ((x-c)^2).$$

Выпуклость функции

Величина $\circ((x-c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-c)^2$, когда $x \to c$.

Выпуклость функции

Величина $\circ((x-c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-c)^2$, когда $x \to c$.

Поэтому

$\exists U(c)\ \forall x \in U(c):$

Величина $\circ((x-c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-c)^2$, когда $x \to c$.
Поэтому
$\exists U(c)\ \forall x \in U(c):$

$$\left|\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2\right| > |\circ((x-c)^2)|$$

Выпуклость функции

Величина $\circ((x-c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-c)^2$, когда $x \to c$.

Поэтому

$\exists U(c)\ \forall x \in U(c):$

$$|\frac{1}{2}f''(c)(x-c)^2| > |\circ((x-c)^2)|$$

при условии, что $f''(c) \neq 0$.

Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$,

Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c, В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c, а значит, c не будет точкой перегиба.

Выпуклость функции

В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x) - L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c, а значит, c не будет точкой перегиба.

Значит, если c - точка перегиба, то $f''(c) = 0$.

$\blacksquare$

Теорема (достаточное условие перегиба)

Выпуклость функции

Теорема (достаточное условие перегиба)
Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c, кроме, быть может, самой точки c, в которой она является дифференцируемой.

Теорема (достаточное условие перегиба)
Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c, кроме, быть может, самой точки c, в которой она является дифференцируемой. Если при переходе через точку c вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка c - это точка перегиба.

Схема полного исследования функции

Схема полного исследования функции

1. Область определения
2. Нули функции
3. Интервалы знакопостоянства
4. Асимптоты
   а) вертикальные
   б) наклонные
5. Точки локального экстремума, возрастание и убывание функции
6. Точки перегиба, выпуклость вверх и вниз