Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 3.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Формула Тейлора

Определение

Многочленом Тейлора степени n функции $f(x)$ в точке c называется многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \\ + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n.$$

*Свойство многочлена Тейлора**

*Свойство многочлена Тейлора**

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных,

*Свойство многочлена Тейлора**

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных, т.е.

$$P_n(c) = f(c),\ P_n'(c) = f'(c),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c).$$

Доказательство

Доказательство

$P_n(c) =$

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c-c)+$$
$$+\frac{1}{2!}f''(c)(c-c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c-c)^n$$

Формула Тейлора

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c-c) +$$
$$+\frac{1}{2!}f''(c)(c-c)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c-c)^n =$$
$$= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)\cdot 0 + \frac{1}{2!}f''(c)\cdot 0 + ... +$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\cdot 0$$

Доказательство

$$P_n(c) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c-c)+$$
$$+\frac{1}{2!}f''(c)(c-c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c-c)^n =$$
$$= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)\cdot 0 + \frac{1}{2!}f''(c)\cdot 0 + \ldots +$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\cdot 0 = f(c).$$

Формула Тейлора

$$P_n'(x) =$$

Формула Тейлора

$$P_n'(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x-c) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x-c)^{n-1}.$$

$P_n'(c) =$

Формула Тейлора

$$P_n'(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1}$$

Формула Тейлора

$$P_n'(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)\cdot 0 + \ldots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)\cdot 0$$

$$P_n'(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)\cdot 0 + \ldots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)\cdot 0 =$$

$$= f'(c).$$

Формула Тейлора

$$P_n'(c) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)\cdot 0 + \ldots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)\cdot 0 =$$

$$= f'(c).$$

Аналогично для остальных производных. ■

Теорема (формула Тейлора)

Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно.

Теорема (формула Тейлора)
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$f(x)$

Теорема (формула Тейлора)
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c)$$

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!} f'(c)(x - c)$$

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2$$

Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора)
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 +$$

$$+ \ldots$$

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n$$

Теорема (формула Тейлора)
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!} f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!} f''(c)(x - c)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x - c)^n + r_n$$

Теорема (формула Тейлора)
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \\ + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + r_n$$

Теорема (формула Тейлора)
Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \\ + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + r_n = P_n(x) + r_n,$$

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива формула Тейлора n-ого порядка

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{1!} f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!} f''(c)(x-c)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n + r_n = P_n(x) + r_n,$$

где r_n - остаточный член формулы Тейлора.

Формы записи остаточного члена:

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$

2) форма Лагранжа

Формула Тейлора

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x-c))(x-c)^{n+1},$$

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c + \theta(x-c))(x-c)^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1$$

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$,

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x)$$

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0)$$

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x$$

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!}f''(0)\cdot x^2$$

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \ldots$$

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!}f''(0)\cdot x^2 + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\cdot x^n$$

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0) \cdot x + \frac{1}{2!}f''(0) \cdot x^2 + \ldots + \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) \cdot x^n + \circ(x^n), x \to 0.$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n,

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c, будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n,а $r_n = \circ((x-c)^n), x \to c$ - остаточный член формулы Тейлора.

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n, получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Отбросив r_n, получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Чем больше n и ближе x к c, тем точнее данная формула.

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5,$$

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2)$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$\sin\dfrac{\pi}{6} = 0.5, \dfrac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x,$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$\sin\dfrac{\pi}{6} = 0.5, \dfrac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x,\ \sin\dfrac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4)$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!},$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6)$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x,\ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!},\ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Пример:

$$\sin\frac{\pi}{6} = 0.5, \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + \circ(x^2) \approx x, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \ \sin\frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$\sin\frac{\pi}{6} \approx 0.500003.$$

Монотонность функции

Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на интервале (a, b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2\colon\ f(x_1) \leq f(x_2).$$

Монотонность функции

Определение
Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на интервале (a, b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2\colon\ f(x_1) \leq f(x_2).$$

Определение
Функция $f(x)$ называется **строго возрастающей** на интервале (a, b), если

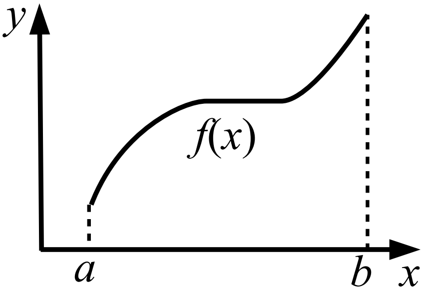
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2\colon\ f(x_1) < f(x_2).$$

Монотонность функции

Примеры:

Монотонность функции

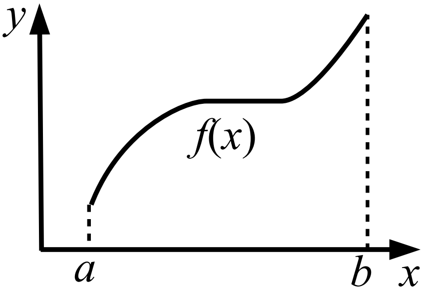
Примеры:



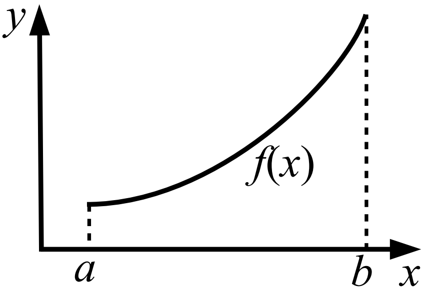
Возрастающая
функция

Монотонность функции

Примеры:



Возрастающая функция



Строго возрастающая функция

Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **убывающей** на интервале (a, b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2\colon\ f(x_1) \geq f(x_2).$$

Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **убывающей** на интервале (a, b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2\colon f(x_1) \geq f(x_2).$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **строго убывающей** на интервале (a, b), если

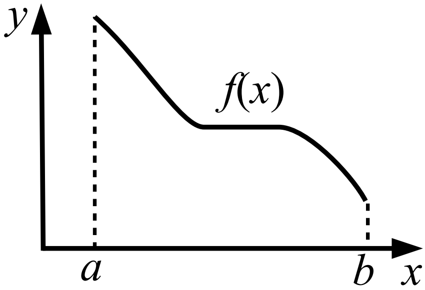
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2\colon f(x_1) > f(x_2).$$

Монотонность функции

Примеры:

Монотонность функции

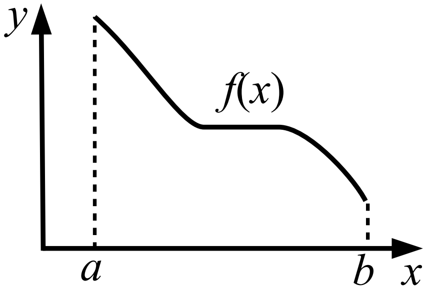
Примеры:



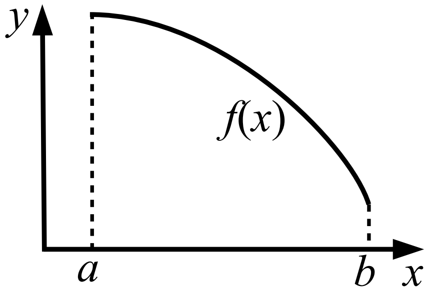
Убывающая функция

Монотонность функции

Примеры:



Убывающая функция



Строго убывающая функция

Монотонность функции

Определение

Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными**.

Монотонность функции

Определение

Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными**.

Определение

Строго возрастающие и строго убывающие функции называются **строго монотонными**.

Монотонность функции

Обозначения

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a,b), f(x) \in C[a,b]$

функция $f(x)$ непрерывна в точке c,

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$

функция $f(x)$ непрерывна в точке c,

на интервале (a, b),

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a,b), f(x) \in C[a,b]$

функция $f(x)$ непрерывна в точке c,

на интервале (a,b), на отрезке $[a,b]$.

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a,b), f(x) \in C[a,b]$

функция $f(x)$ непрерывна в точке c,

на интервале (a,b), на отрезке $[a,b]$.

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$

Обозначения

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a,b), f(x) \in D[a,b]$

функция $f(x)$ дифференцируема в точке c,

Обозначения

$f(x) \in D(c)$, $f(x) \in D(a, b)$, $f(x) \in D[a, b]$

функция $f(x)$ дифференцируема в точке c,

на интервале (a, b),

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a,b), f(x) \in D[a,b]$

функция $f(x)$ дифференцируема в точке c,

на интервале (a,b), на отрезке $[a,b]$,

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a,b), f(x) \in D[a,b]$

функция $f(x)$ дифференцируема в точке c,
на интервале (a,b), на отрезке $[a,b]$, т.е. имеет
производную $f'(x)$ на этих промежутках.

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a,b), f(x) \in D^2[a,b]$

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c)$, $f(x) \in D^2(a,b)$, $f(x) \in D^2[a,b]$

функция $f(x)$ дважды дифференцируема

в точке c,

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c)$, $f(x) \in D^2(a,b)$, $f(x) \in D^2[a,b]$

функция $f(x)$ дважды дифференцируема

в точке c, на интервале (a,b),

Монотонность функции

Обозначения

$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$

функция $f(x)$ дважды дифференцируема

в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$,

Обозначения

$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$

функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c, на интервале (a, b), на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производные $f'(x)$, $f''(x)$ на этих промежутках.

*Теорема (достаточное условие монотонности)**

Монотонность функции

*Теорема (достаточное условие монотонности)**

Пусть $f(x) \in D(a, b)$.

*Теорема (достаточное условие монотонности)**
Пусть $f(x) \in D(a,b)$.
Если
$$\forall x \in (a,b)\ f'(x) > 0,$$
то на интервале (a,b) функция $f(x)$ строго возрастает.

*Теорема (достаточное условие монотонности)**
Пусть $f(x) \in D(a, b)$.
Если

$$\forall x \in (a, b)\ f'(x) > 0,$$

то на интервале (a, b) функция $f(x)$ строго возрастает.
Если

$$\forall x \in (a, b)\ f'(x) < 0,$$

то на интервале (a, b) функция $f(x)$ строго убывает.

Доказательство

Монотонность функции

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$.

Монотонность функции

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$.

По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2).$$

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

Монотонность функции

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$,

Монотонность функции

Откуда
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$
Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$

Откуда
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$
Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем
1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$,

Монотонность функции

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,

2) если $f'(c) < 0$,

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,

2) если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$

Монотонность функции

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,

2) если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$,

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,

2) если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго убывает.

■

Экстремум функции

Экстремум функции

Определение

Точка c называется **критической точкой** функции $f(x)$, если ее производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.

Экстремум функции

Определение

Точка c называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \mathring{U}(c)\ \forall x \in \mathring{U}(c)\colon f(x) \le f(c).$$

Определение

Точка c называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(c)\colon f(x) \le f(c).$$

Определение

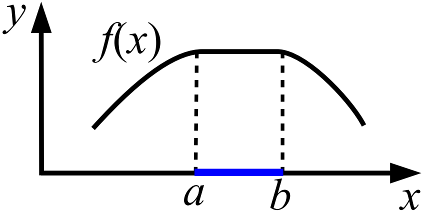
Точка c называется **точкой строгого локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(c)\colon f(x) < f(c).$$

Примеры:

Экстремум функции

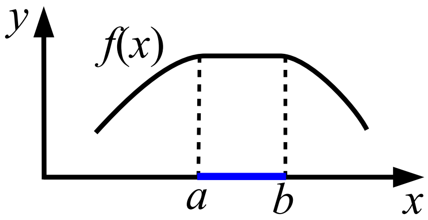
Примеры:

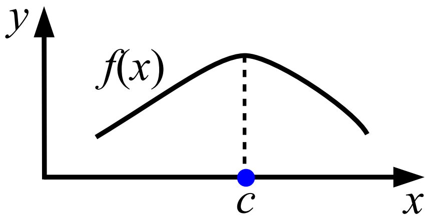


Каждая точка отрезка $[a, b]$ - это точка локального максимума

Экстремум функции

Примеры:





Каждая точка отрезка $[a, b]$ - это точка локального максимума

Точка c - это точка строгого локального максимума

Определение

Точка c называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(c)\colon f(x) \geq f(c).$$

Экстремум функции

Определение

Точка c называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(c) \colon f(x) \geq f(c).$$

Определение

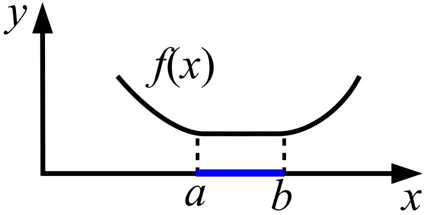
Точка c называется **точкой строгого локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \overset{\circ}{U}(c)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(c) \colon f(x) > f(c).$$

Примеры:

Экстремум функции

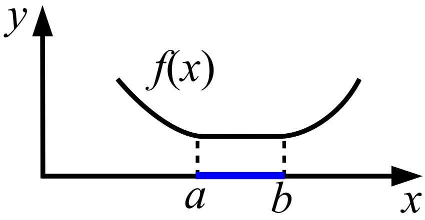
Примеры:

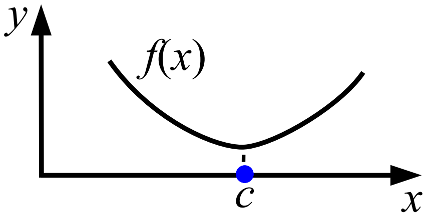


Каждая точка отрезка $[a, b]$ - это точка локального минимума

Экстремум функции

Примеры:





Каждая точка отрезка $[a, b]$ - это точка локального минимума

Точка c - это точка строгого локального минимума

Определение

Точки локального максимума и минимума функции также называются **точками экстремума** функции.

Определение

Точки локального максимума и минимума функции также называются **точками экстремума** функции.

Точки строгого локального максимума и минимума функции называются **точками строгого экстремума** функции.

Экстремум функции

Определение

Значение функции в точке локального максимума называется ее **локальным максимумом**.

Экстремум функции

Определение

Значение функции в точке локального максимума называется ее **локальным максимумом**.

Значение функции в точке локального минимума называется ее **локальным минимумом**.

Экстремум функции

Определение

Значение функции в точке локального максимума называется ее **локальным максимумом**.

Значение функции в точке локального минимума называется ее **локальным минимумом**.

Локальные максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**.

Замечание

Замечание

Аналогично определяется **строгий экстремум функции**.