Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 3.1

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Производная

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0.

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1.

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда
$\Delta x = x_1 - x_0$

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда $\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение значения аргумента x в точке x_0 при переходе к точке x_1,

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда

$\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение значения аргумента x в точке x_0 при переходе к точке x_1,

$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда
$\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение значения аргумента x в точке x_0 при переходе к точке x_1,
$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Производная

Рассмотрим функцию $f(x)$ и зафиксируем точку x_0. В окрестности точки x_0 выберем произвольную точку x_1. Тогда $\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение значения аргумента x в точке x_0 при переходе к точке x_1, $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение значения функции $f(x)$ в точке x_0 при переходе к точке x_1.

Производная

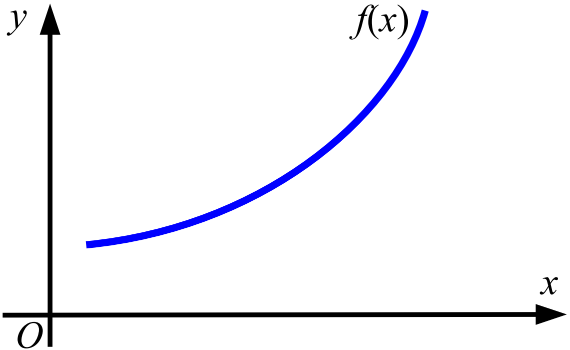
$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

Производная

$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

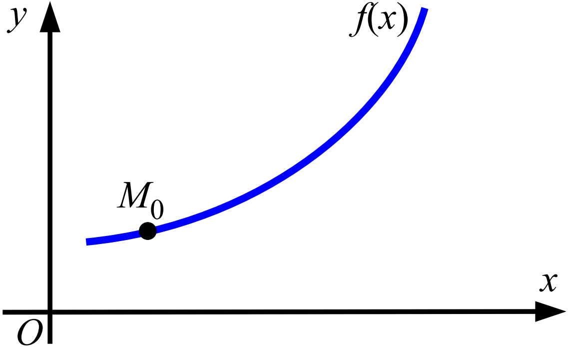
Производная

$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



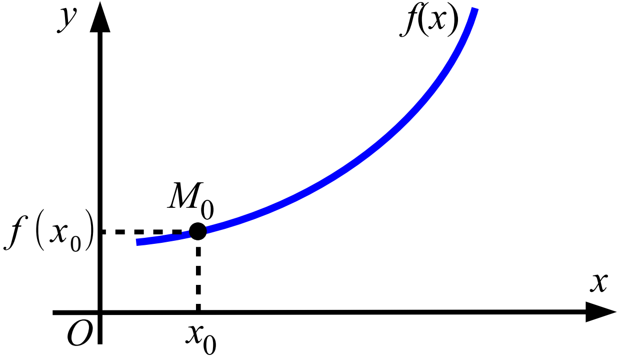
Производная

$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



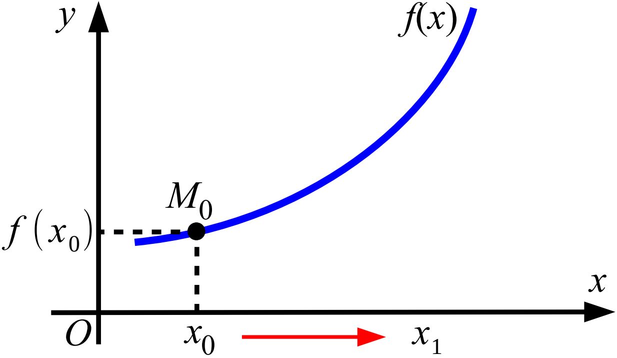
Производная

$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



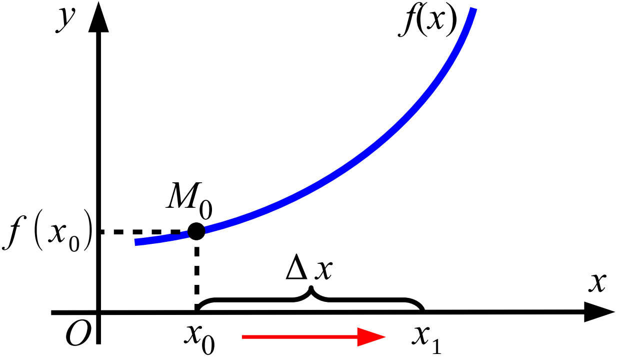
Производная

$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



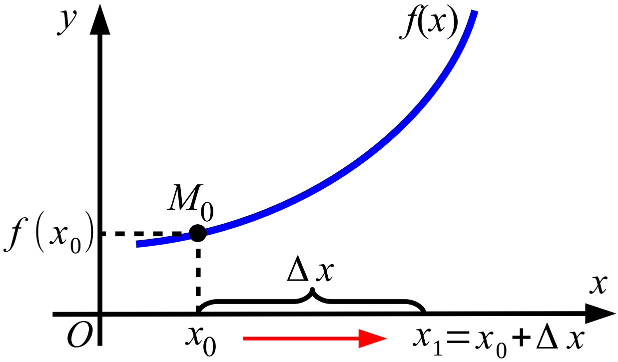
Производная

$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



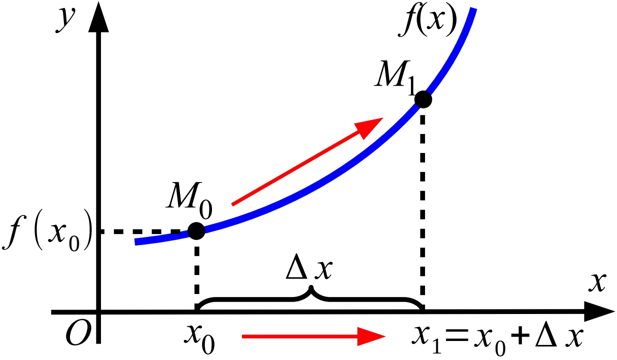
Производная

$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

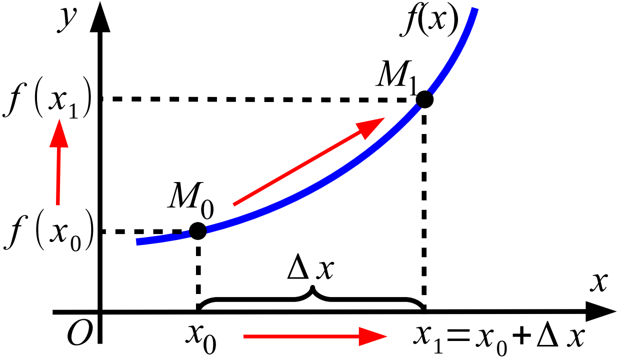


Производная

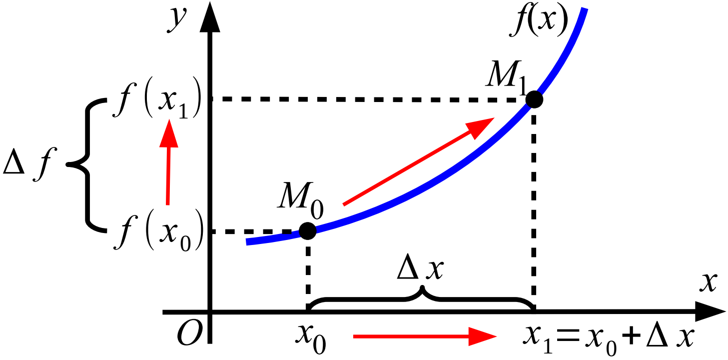
$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$



Производная

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Производная

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. **Производной** функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Обозначение: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Производная

Если

$$f'(x_0) = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует **бесконечная производная**,

Производная

Если

$$f'(x_0) = \infty, +\infty, -\infty,$$

то говорят, что в точке x_0 существует **бесконечная производная**, в противном случае – **конечная производная**.

Замечание

Поскольку мы работаем в основном с конечными производными, то в дальнейшем для краткости под словом "производная" мы будем понимать именно конечную производную.

Замечание

Поскольку мы работаем в основном с конечными производными, то в дальнейшем для краткости под словом "производная" мы будем понимать именно конечную производную. Случай бесконечной производной будет всегда оговариваться особо.

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Определение

Правосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Определение

Левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначение: $f'_-(x_0)$.

Определение

Правосторонняя и левосторонняя производные называются **односторонними производными**.

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

Производная

Теорема (о связи односторонних производных с двусторонней)

$$\exists f'(x_0) = A \Leftrightarrow \exists f'_+(x_0) = A, f'_-(x_0) = A.$$

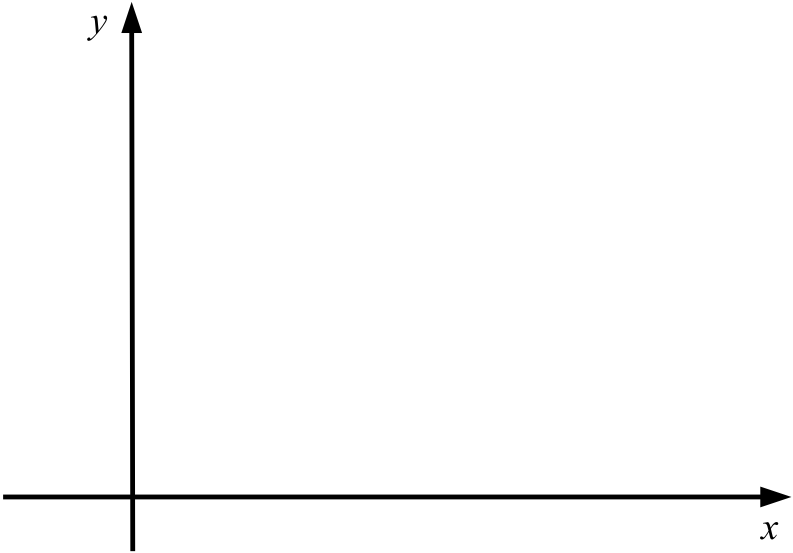
Производная

Определение

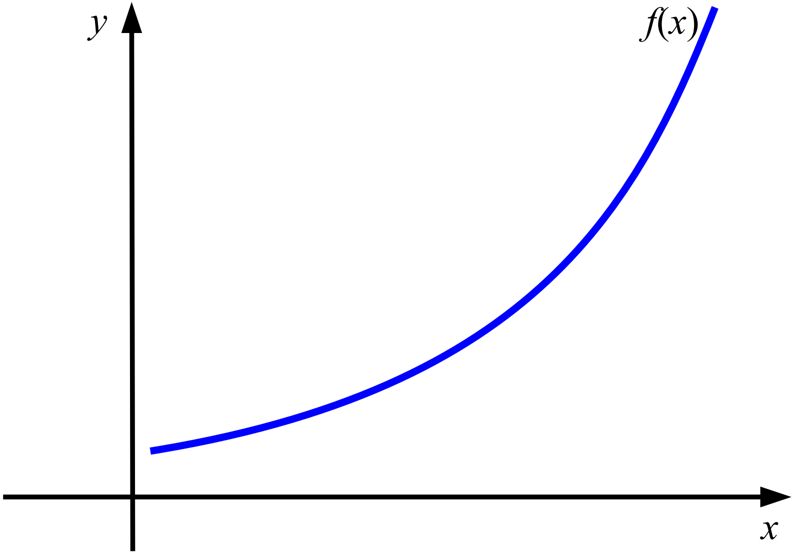
Процесс нахождения производной называется **дифференцированием**.

Геометрический смысл производной

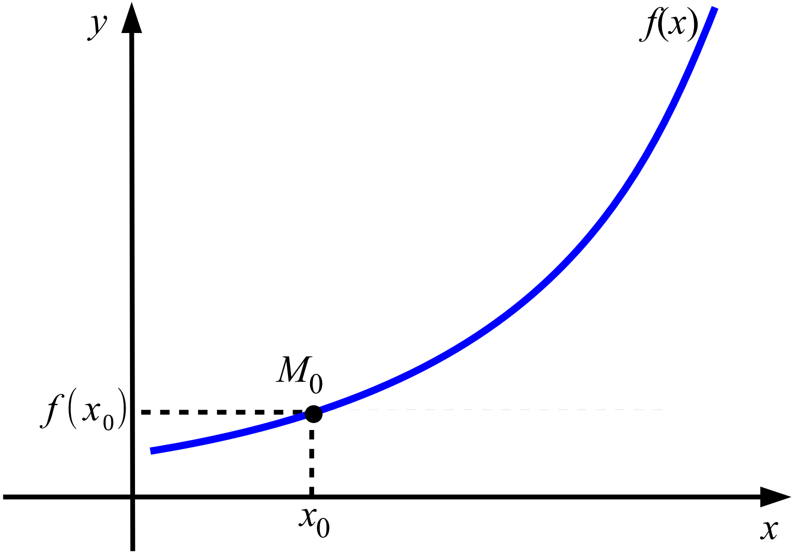
Геометрический смысл производной



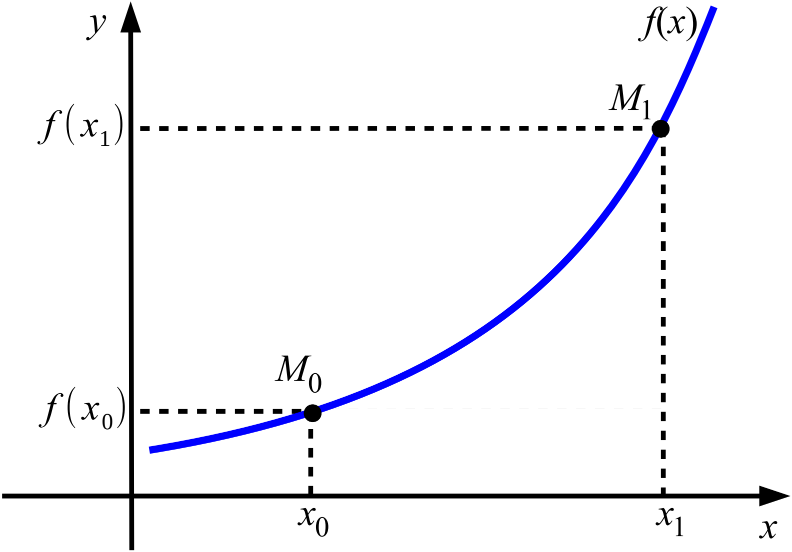
Геометрический смысл производной



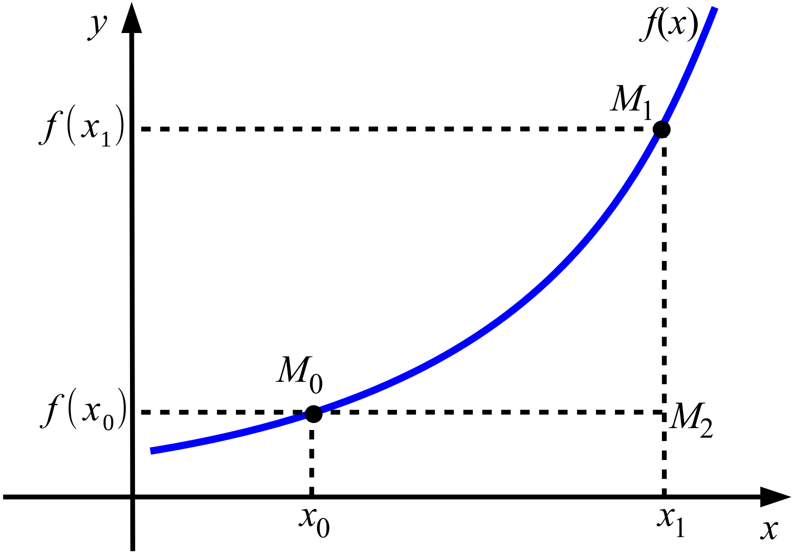
Геометрический смысл производной



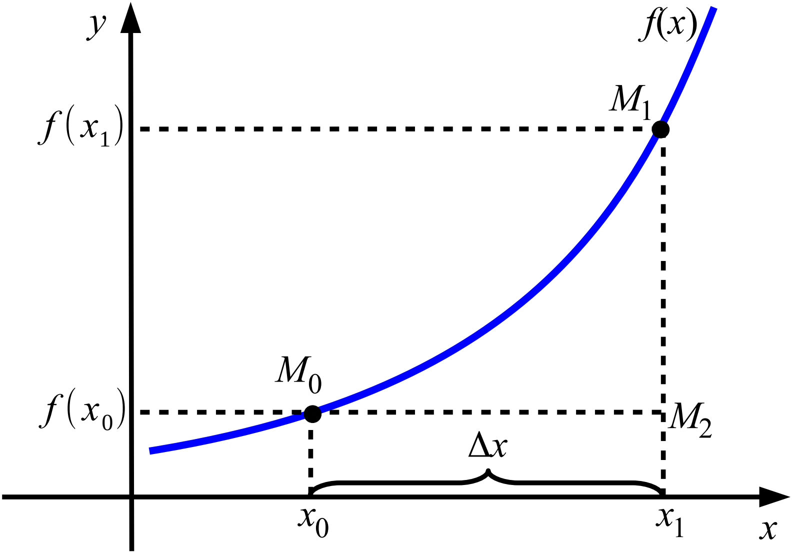
Геометрический смысл производной



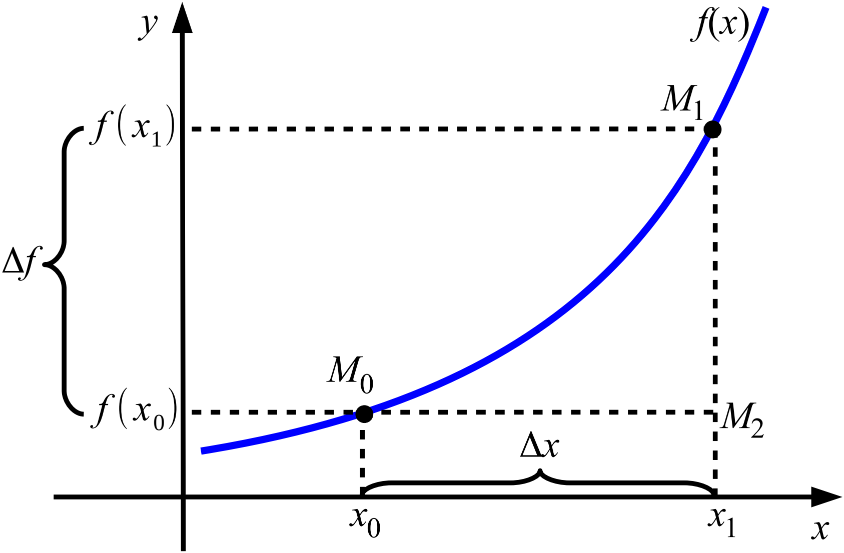
Геометрический смысл производной



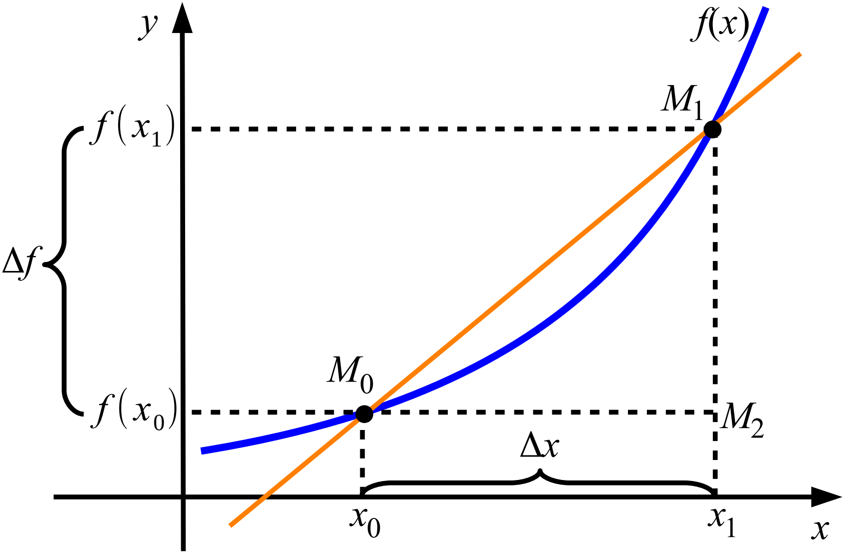
Геометрический смысл производной



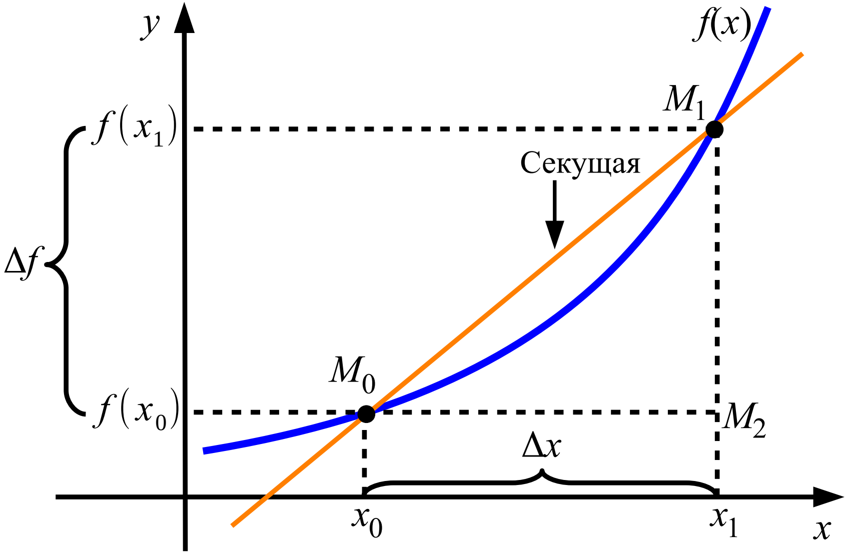
Геометрический смысл производной



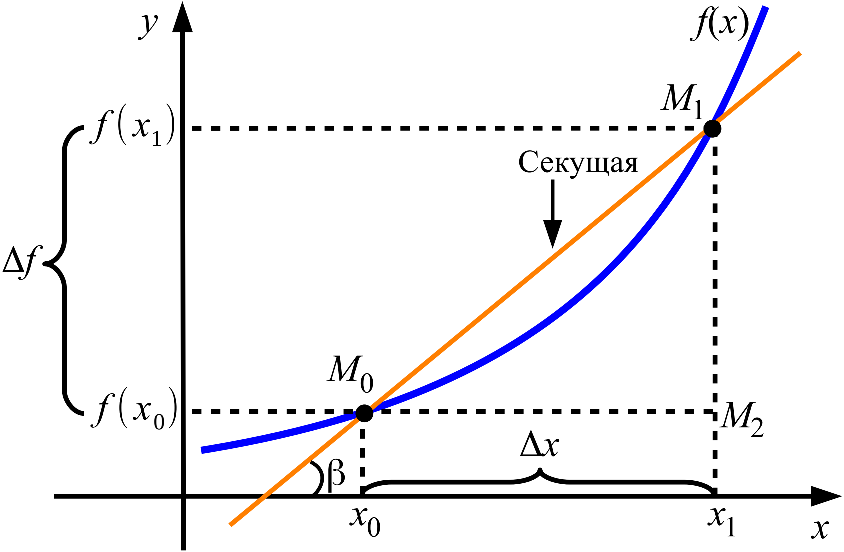
Геометрический смысл производной



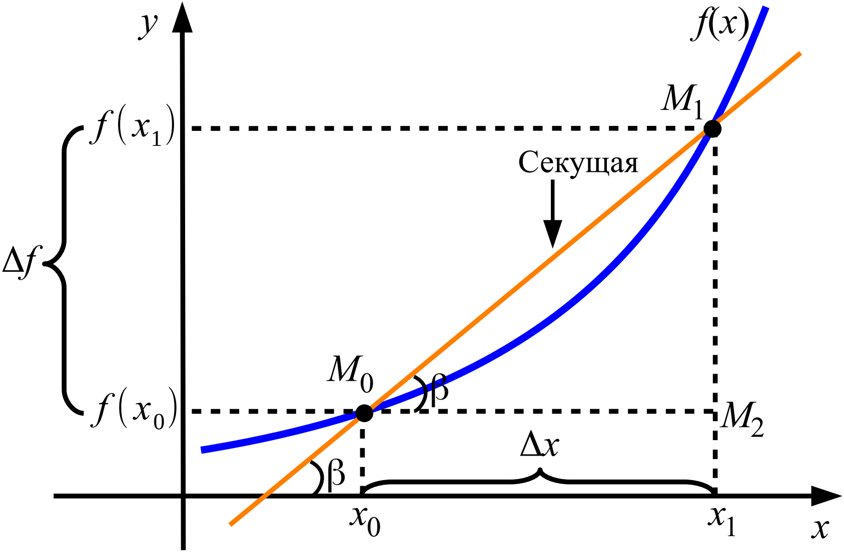
Геометрический смысл производной



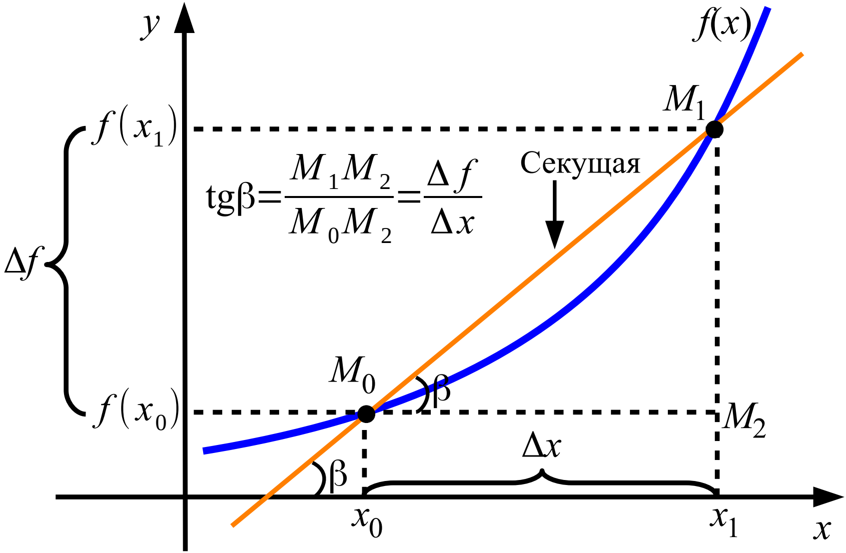
Геометрический смысл производной



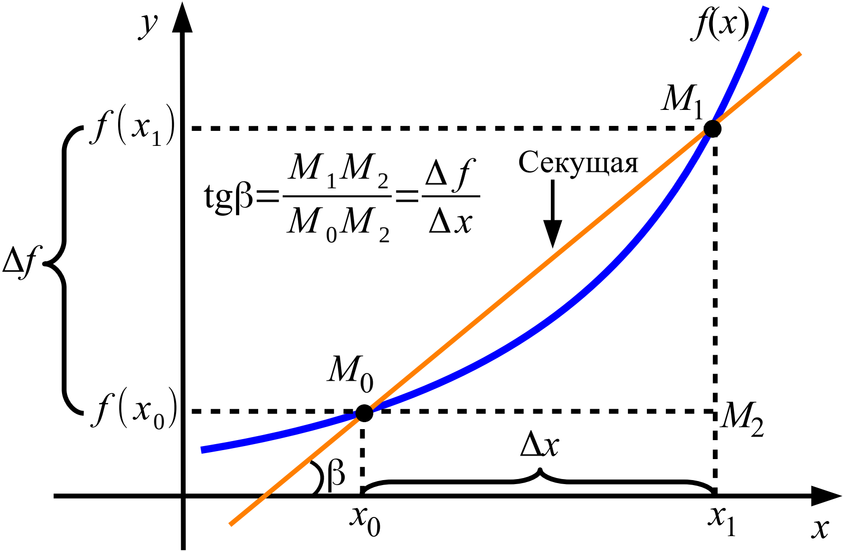
Геометрический смысл производной



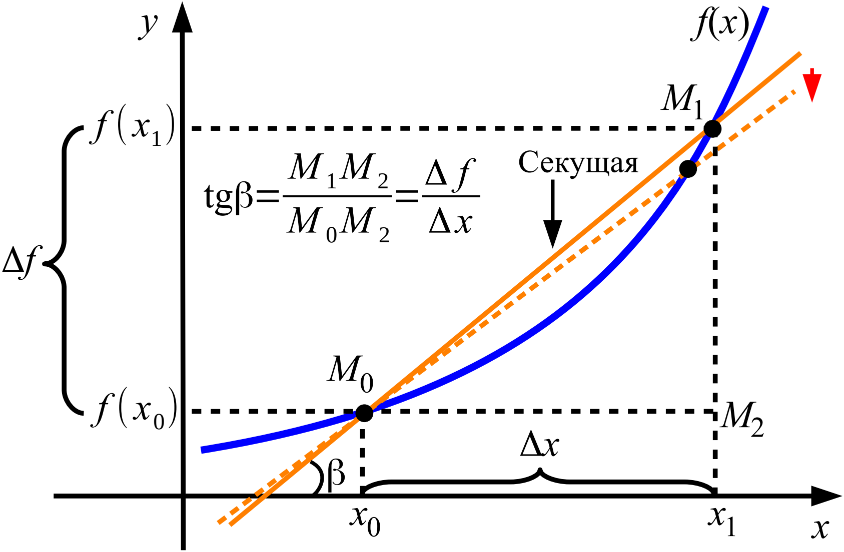
Геометрический смысл производной



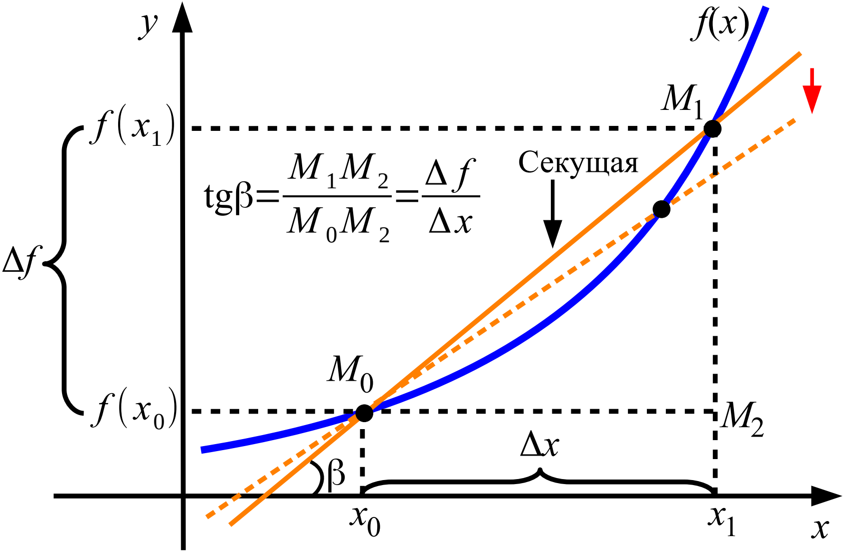
Геометрический смысл производной



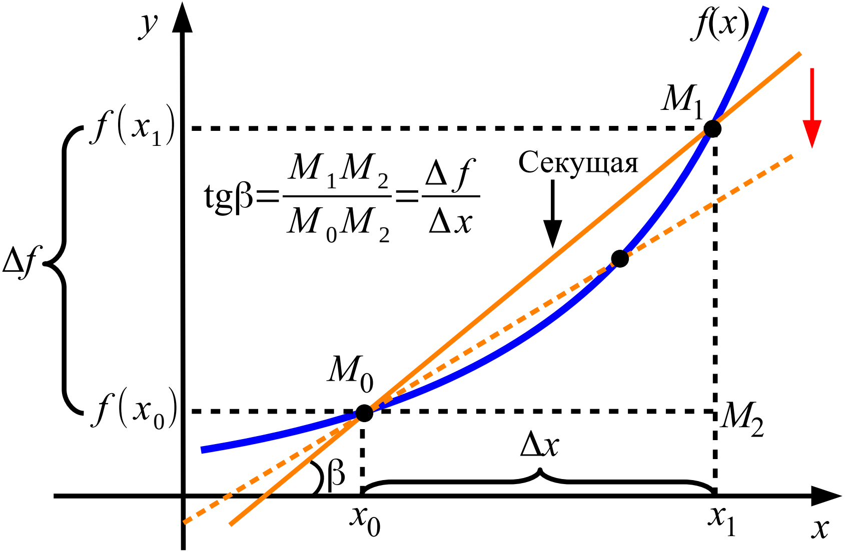
Геометрический смысл производной



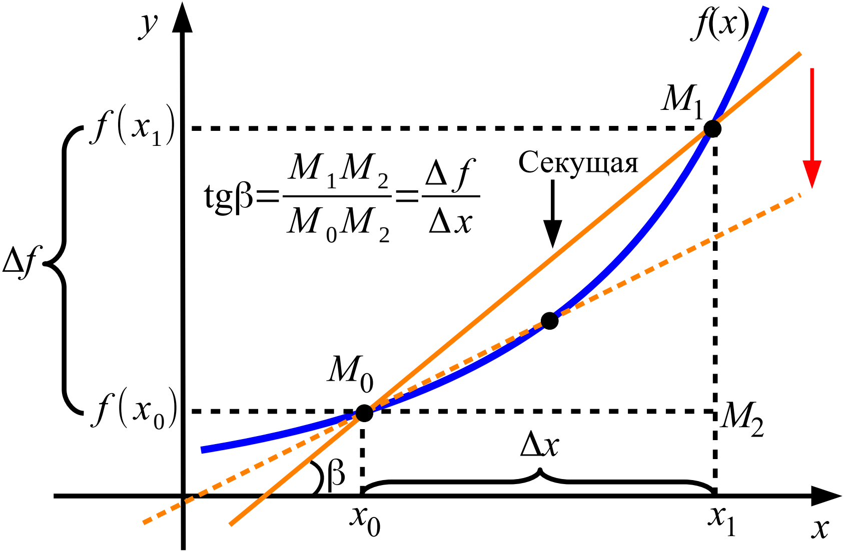
Геометрический смысл производной



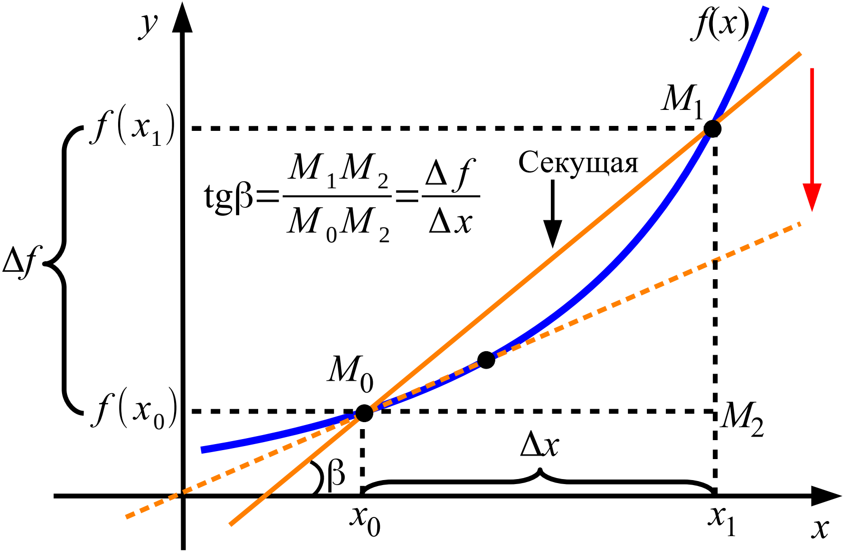
Геометрический смысл производной



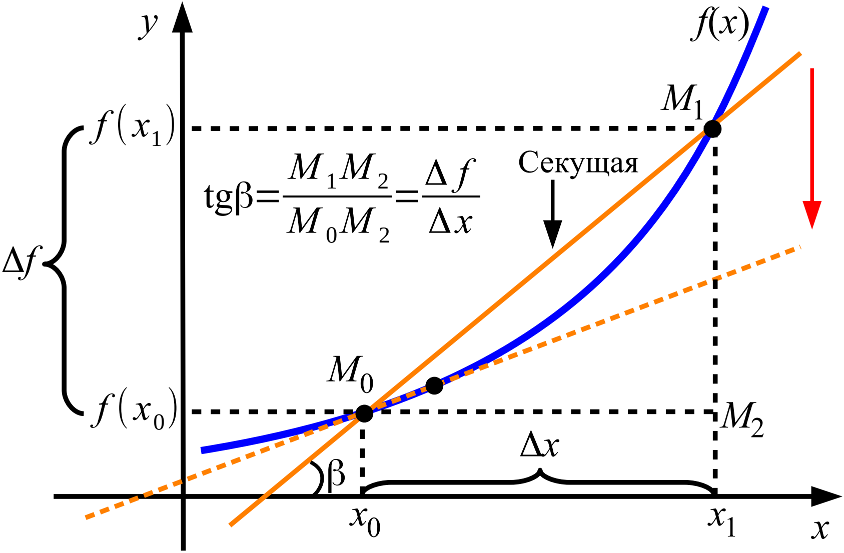
Геометрический смысл производной



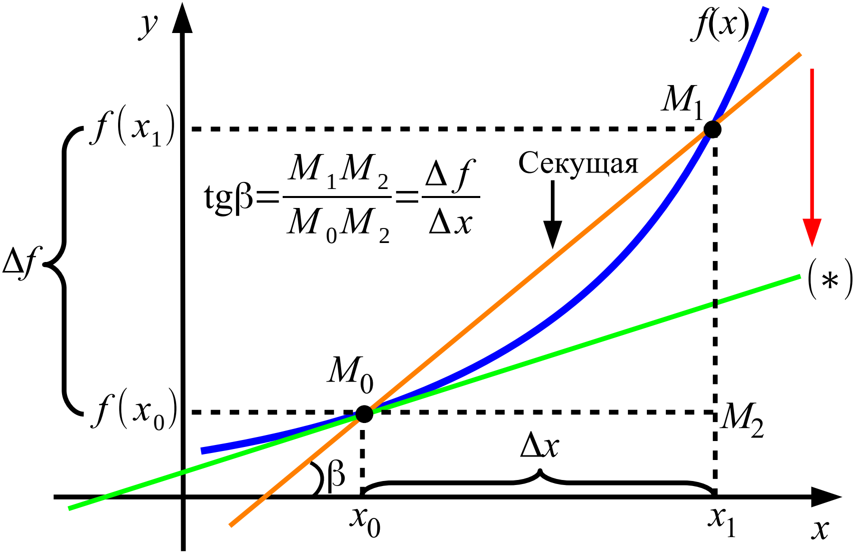
Геометрический смысл производной



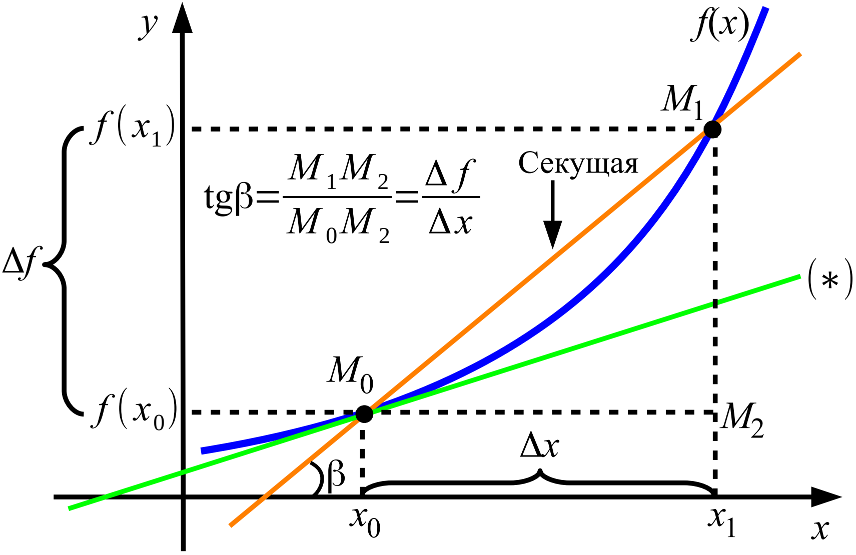
Геометрический смысл производной



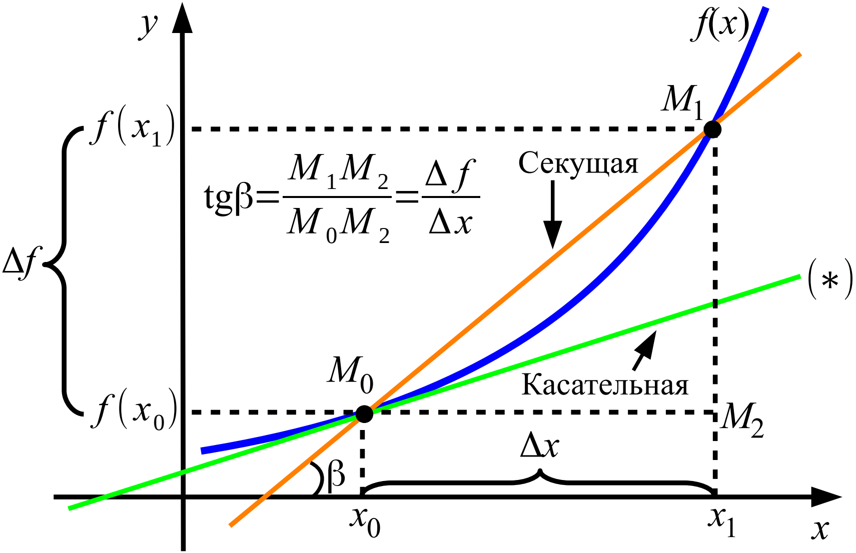
Геометрический смысл производной



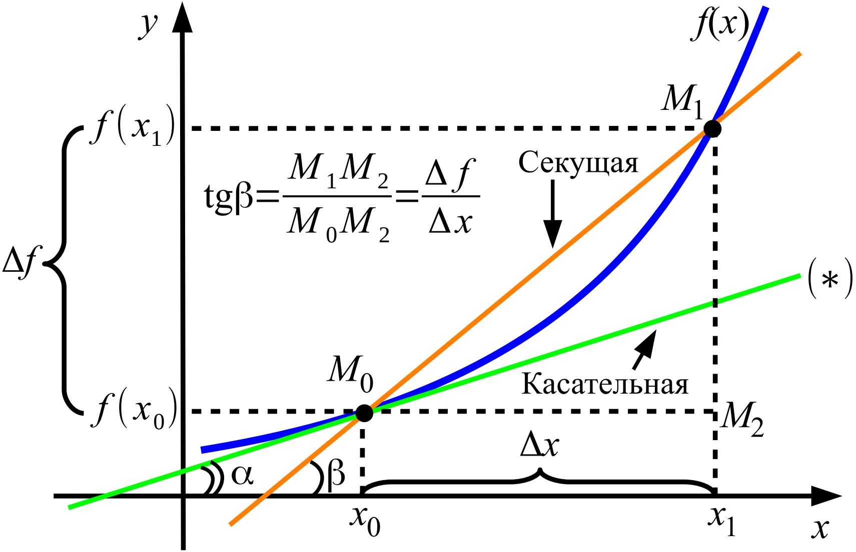
Геометрический смысл производной



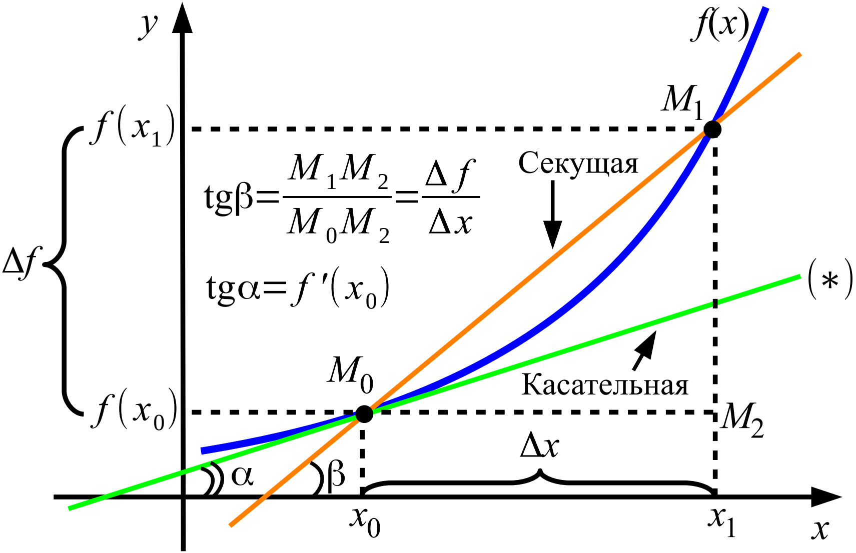
Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной



Геометрический смысл производной

Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в ней конечную производную.

Геометрический смысл производной

Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в ней конечную производную.
Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$.

Геометрический смысл производной

Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в ней конечную производную.
Через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$, проведем секущую M_0M_1 графика функции $y = f(x)$.
Устремив точку M_1 вдоль графика функции к точке M_0, мы переведем секущую M_0M_1 в прямую $(*)$, которая в окрестности точки x_0 будет иметь с графиком функции $f(x)$ только одну общую точку.

Определение

Предельное положение секущей M_0M_1, когда $M_1 \to M_0$, называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий

Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b$$

Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b \ \text{ и } \ M_1 : y_1 = kx_1 + b.$$

Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b \quad \text{и} \quad M_1 : y_1 = kx_1 + b.$$

Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Геометрический смысл производной

Коэффициенты уравнения

$$y = kx + b$$

секущей M_0M_1 находим из условий

$$M_0 : y_0 = kx_0 + b \;\text{ и }\; M_1 : y_1 = kx_1 + b.$$

Откуда получаем

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

где $\Delta f = y_1 - y_0$, $\Delta x = x_1 - x_0$.

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x, x_0, y_0 не зависят от x_1,

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x, x_0, y_0 не зависят от x_1, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$y_{\text{сек}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Переходим в этом уравнении к пределу при $x_1 \to x_0$ или $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0) + y_0 \right).$$

Т.к. x, x_0, y_0 не зависят от x_1, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\right)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) (x - x_0) + y_0.$$

По определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$

Геометрический смысл производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Обозначив

$$\lim_{\Delta x \to 0} y_{\text{сек}} = y_{\text{кас}},$$

получаем **уравнение касательной**

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Геометрический смысл производной

уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Геометрический смысл производной

уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Геометрический смысл производной

уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

уравнение касательной

$$y_{\text{кас}} = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Из этого уравнения следует **геометрический смысл** конечной производной:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

Дифференцируемость функции

Дифференцируемость функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

Дифференцируемость функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где

A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Определение

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где

A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$

Дифференцируемость функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение Δf в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где

A - постоянная, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

*Теорема (об эквивалентности дифференцируемости и существования производной)**

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Дифференцируемость функции

Доказательство

Доказательство

1. Прямая теорема. $(\Rightarrow)$

Доказательство

1. Прямая теорема. $(\Rightarrow)$

Дано: $f(x) \in D(x_0)$.

Дифференцируемость функции

Доказательство

1. Прямая теорема. $(\Rightarrow)$

Дано: $f(x) \in D(x_0)$.

Доказать: $\exists f'(x_0)$.

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$
$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) \qquad : \Delta x$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) \quad : \Delta x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

Дифференцируемость функции

$$f(x) \in D(x_0)$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) \qquad : \Delta x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\circ(\Delta x)}{\Delta x}$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

$$\Downarrow$$

$$\exists f'(x_0)$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

$$\Downarrow$$

$$\exists f'(x_0) = A.$$

Дифференцируемость функции

2. Обратная теорема. $(\Leftarrow)$

2. Обратная теорема. $(\Leftarrow)$

Дано: $\exists f'(x_0)$.

2. Обратная теорема. $(\Leftarrow)$

Дано: $\exists f'(x_0)$.

Доказать: $f(x) \in D(x_0)$.

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0)$$

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A.$

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Дифференцируемость функции

$$\exists f'(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Пусть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$. Тогда по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Отсюда

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

Дифференцируемость функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x), \Delta x \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) \in D(x_0). \blacksquare$$

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

Дифференцируемость функции

*Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции)**

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0).$$

Доказательство

Дифференцируемость функции

Доказательство

$f(x) \in D(x_0)$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f =$$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) =$$

Доказательство

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0$$

Дифференцируемость функции

Доказательство

$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x)) = 0$

$\Rightarrow f(x) \in C(x_0)$.

$\blacksquare$

Дифференциал функции

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$.

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$$

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0.$$

Определение

Линейная по переменной Δx функция $A \cdot \Delta x$ называется **дифференциалом (первым дифференциалом, дифференциалом первого порядка)** функции $f(x)$ в точке x_0.

Дифференциал функции

Пусть $f(x) \in D(x_0)$. Тогда
$$\Delta f = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$$

Определение

Линейная по переменной Δx функция $A \cdot \Delta x$ называется **дифференциалом (первым дифференциалом, дифференциалом первого порядка)** функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $df(x_0)$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$.

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx.

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0)$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx$$

Дифференциал функции

Ранее было показано, что $A = f'(x_0)$. В свою очередь, приращение независимой переменной Δx часто обозначают как dx. Тогда

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx$$

и

$$\Delta f = df(x_0) + \circ(\Delta x), \Delta x \to 0.$$

Дифференциал функции

Пример:

Дифференциал функции

Пример:

$f(x) = x^3, x_0 = 1,$

Дифференциал функции

Пример:

$f(x) = x^3, x_0 = 1,$

$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3$

Дифференциал функции

Пример:

$f(x) = x^3, x_0 = 1,$

$f'(x) = 3x^2, f'(1) = 3$

$\Rightarrow df(1) = f'(1)dx = 3dx.$

Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение значения функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении значения аргумента x на Δx,

Дифференциал функции

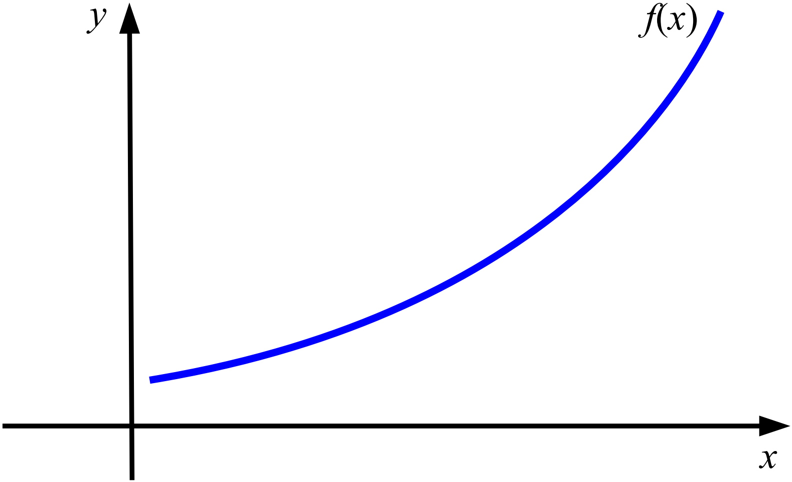
Геометрический смысл дифференциала

Если Δf - это приращение значения функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении значения аргумента x на Δx, то $df(x_0)$ - это приращение ординаты касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 при изменении значения аргумента x на Δx.

Дифференциал функции

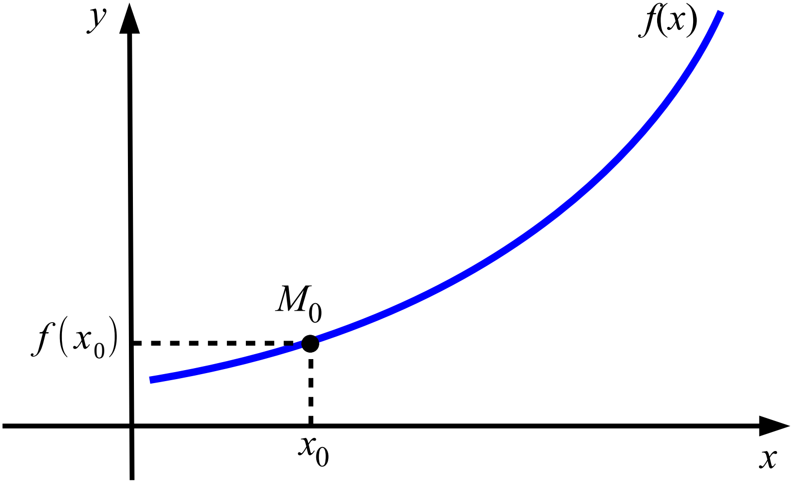
Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала

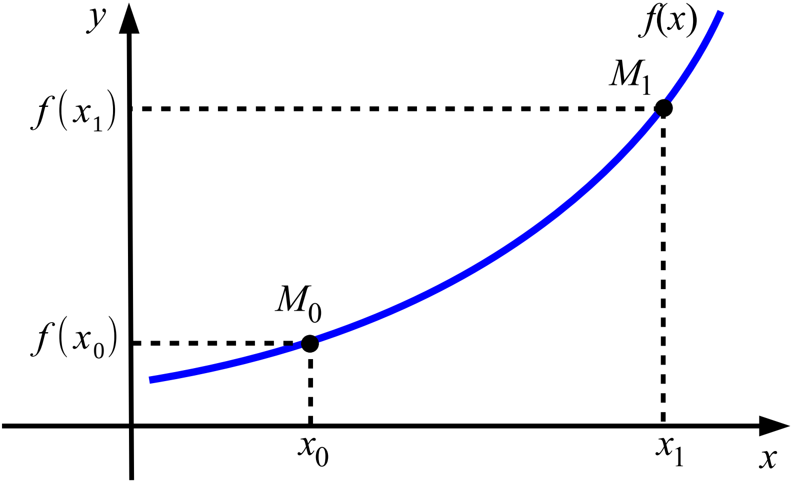


Дифференциал функции

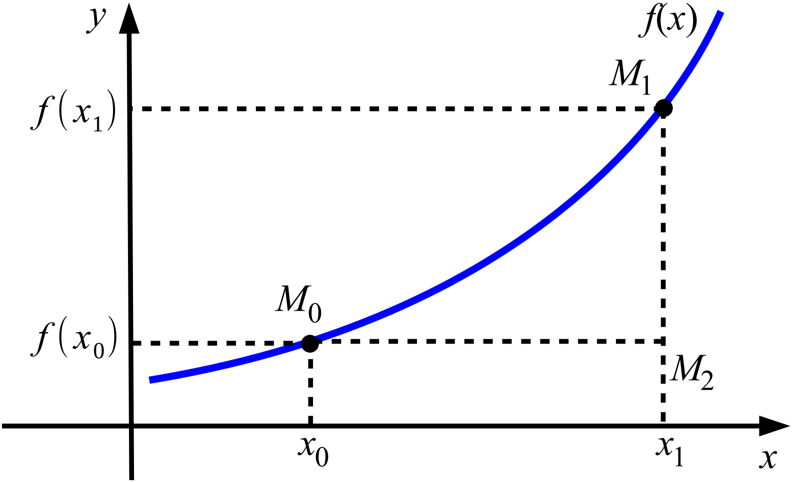
Геометрический смысл дифференциала



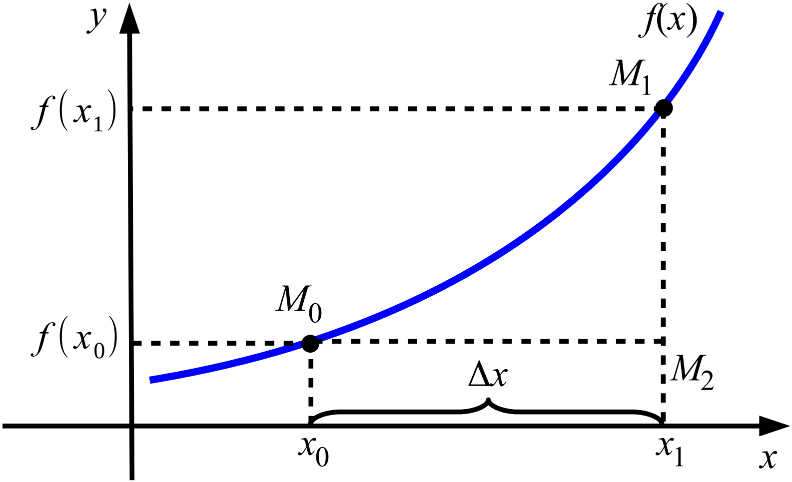
Геометрический смысл дифференциала



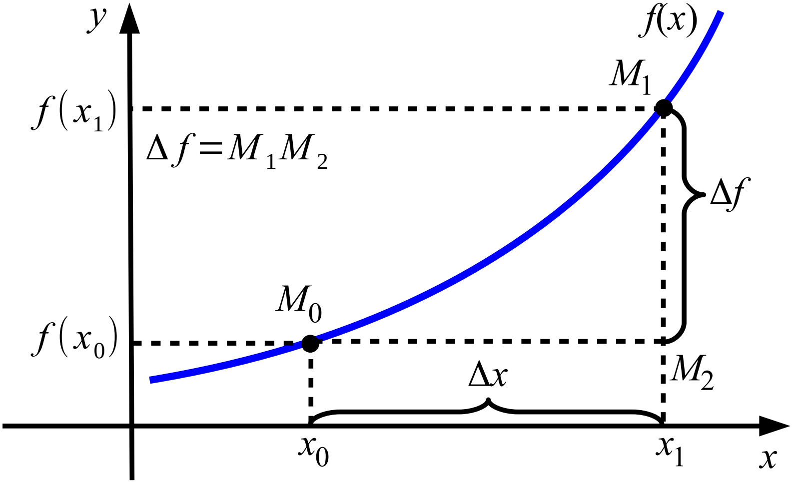
Геометрический смысл дифференциала



Геометрический смысл дифференциала

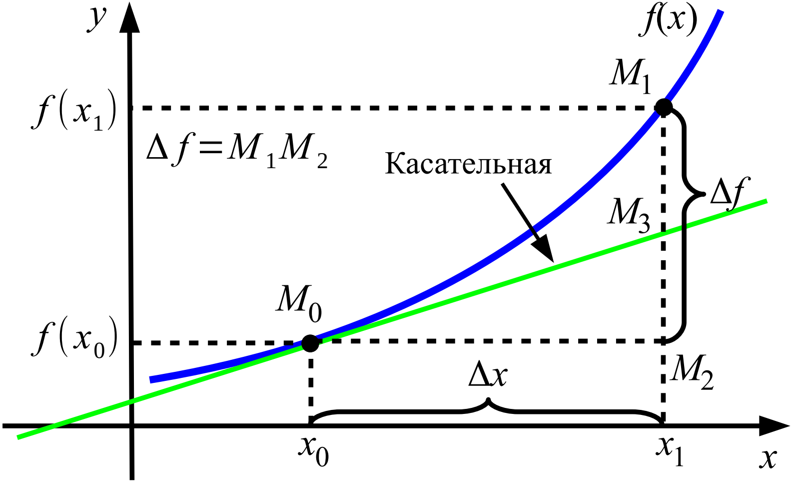


Геометрический смысл дифференциала



Дифференциал функции

Геометрический смысл дифференциала



Геометрический смысл дифференциала