Математический анализ
Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Лекция 3.4

Аннотация

Условия существования экстремума. Выпуклость функции. Точки перегиба. Схема полного исследования функции.

1 Условия существования экстремума

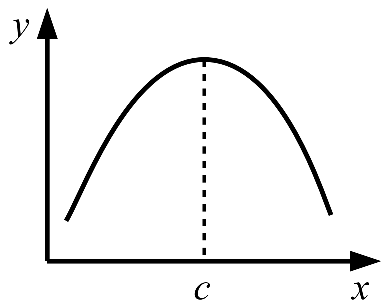
Теорема (необходимое условие экстремума)

Если точка c является точкой экстремума функции $f(x)$, то в этой точке производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.

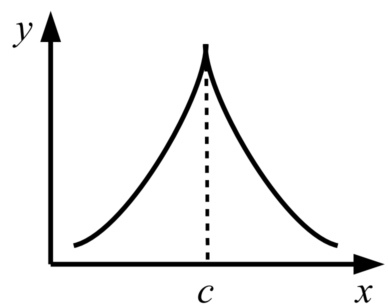
Если $f'(c) = 0$, то в точке c функция имеет гладкий экстремум. Если $f'(c)$ не существует, то в точке c функция имеет острый экстремум.

Примеры:

Гладкий экстремум



Острый экстремум



*Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной)**

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, кроме, быть может, самой точки c, в которой она является непрерывной. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку c, то точка c является точкой строгого экстремума.

Доказательство

Рассмотрим случай $f'(x) > 0$ для $x < c$ и $f'(x) < 0$ для $x > c$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(c) = f'(\xi)(x - c)$, где число ξ лежит на интервале с концами x и c.

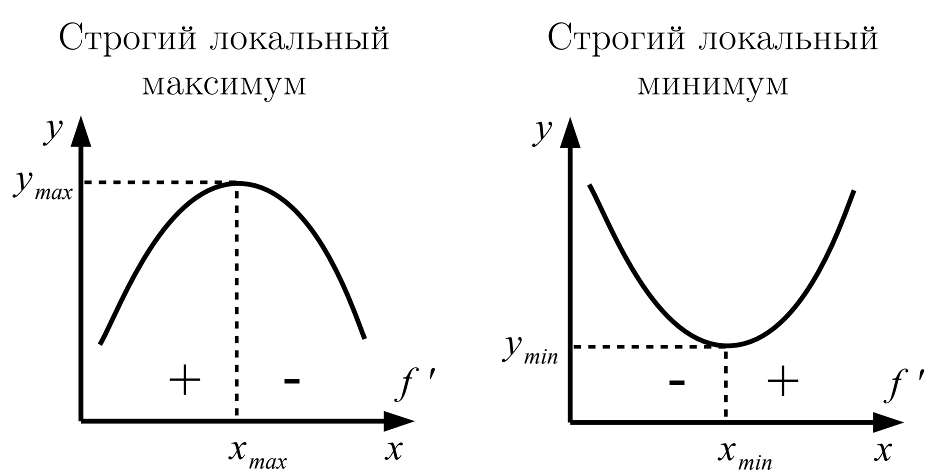
Если $x < c$, то $x - c < 0$, $f'(\xi) > 0. \Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

Если $x > c$, то $x - c > 0$, $f'(\xi) < 0. \Rightarrow f(x) - f(c) < 0$, $f(x) < f(c)$.

$\Rightarrow c$ - точка строгого локального максимума.

Случай локального минимума рассматривается аналогично. ■

Примеры:



Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной)

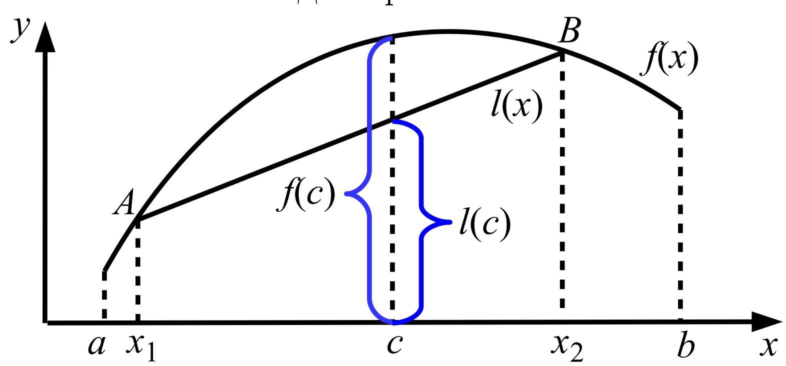
Пусть $f(x) \in D^2(c)$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Если $f''(c) < 0$, то c - точка строгого локального максимума. Если $f''(c) > 0$, то c - точка строгого локального минимума.

2 Выпуклость функции

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Выберем на графике этой функции произвольные точки A с координатой x_1 и B с координатой x_2. Соединим эти точки отрезком, заданным уравнением $y = l(x)$, где $x_1 \le x \le x_2$ и

$$l(x) = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

На интервале (x_1, x_2) выберем произвольную точку c. В данной точке: $f(c)$ - это расстояние от оси Ox до графика функции $f(x)$, а $l(c)$ - расстояние от оси Ox до отрезка AB.



Определение

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх** на (a, b), если

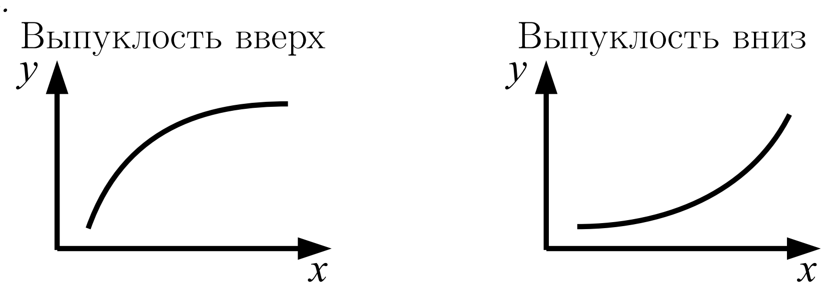
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \text{ и } \forall c \in (x_1, x_2)\colon l(c) \le f(c).$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз** на (a, b), если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \text{ и } \forall c \in (x_1, x_2)\colon l(c) \ge f(c).$$

Примеры:



*Теорема (достаточное условие выпуклости)**

Пусть $f(x) \in D^2(a,b)$. Если $\forall x \in (a,b)$ $f''(x) \le 0$, то $f(x)$ выпукла вверх. Если $\forall x \in (a,b)$ $f''(x) \ge 0$, то $f(x)$ выпукла вниз.

Доказательство

Пусть $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда

$$l(x) - f(x) =$$

$$= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x)\frac{\overbrace{(x - x_1) + (x_2 - x)}^{=1}}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(f(x_2) - f(x))(x - x_1) - (f(x) - f(x_1))(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= |\text{по теореме Лагранжа } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), a < c < b| =$$

$$= \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= |\text{по теореме Лагранжа } f'(b) - f'(a) = f''(c)(b-a), a < c < b| =$$

$$= \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Здесь $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$ и $\xi < \zeta < \eta$.

Поскольку $(\eta - \xi), (x - x_1), (x_2 - x), (x_2 - x_1) > 0$, получаем

1) если $f''(\zeta) \le 0$, то $l(x) \le f(x)$ и $f(x)$ выпукла вверх,

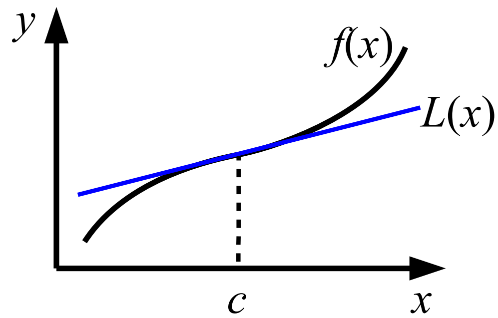
2) если $f''(\zeta) \ge 0$, то $l(x) \ge f(x)$ и $f(x)$ выпукла вниз.

■

Определение

Пусть $f(x) \in D(c)$ и $y = L(x)$ - уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c. Если $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку c, то c называется **точкой перегиба** функции $f(x)$.

Поведение функции в окрестности точки перегиба:



*Теорема (необходимое условие перегиба)**

Если в точке перегиба существует вторая производная, то она равна нулю.

Доказательство

Пусть в точке c существует вторая производная $f''(c)$, и $y = L(x)$ - уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке c. Тогда

$$L(x) = f(c) + f'(c)(x - c).$$

По формуле Тейлора второго порядка имеем:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + \circ((x - c)^2) =$$

$$= L(x) + \frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + \circ((x - c)^2).$$

Откуда $f(x) - L(x) = \dfrac{1}{2}f''(c)(x - c)^2 + \circ((x - c)^2)$.

Величина $\circ((x-c)^2)$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-c)^2$, когда $x \to c$. Поэтому

$$\exists U(c)\ \forall x \in U(c) : |\frac{1}{2}f''(c)(x - c)^2| > |\circ((x - c)^2)|,$$

при условии, что $f''(c) \neq 0$. В этом случае в $U(c)$ знак $f(x) - L(x)$ будет совпадать со знаком $f''(c)$, т.е. $f(x)-L(x)$ не будет менять знак при переходе через точку c, а значит, c не будет точкой перегиба.

Значит, если c - точка перегиба, то $f''(c) = 0$. ■

Теорема (достаточное условие перегиба)

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c, кроме, быть может, самой точки c, в которой она является дифференцируемой. Если при переходе через точку c вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка c - это точка перегиба.

3 Схема полного исследования функции

1. Область определения
2. Нули функции
3. Интервалы знакопостоянства
4. Асимптоты
   а) вертикальные
   б) наклонные
5. Точки локального экстремума, возрастание и убывание функции
6. Точки перегиба, выпуклость вверх и вниз

