

Математический анализ

Модуль 3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 3.3

Аннотация

Формула Тейлора. Формула Маклорена. Приближенные вычисления с помощью формулы Тейлора. Монотонные функции. Экстремум функции.

1 Формула Тейлора

Определение

Многочленом Тейлора степени n функции $f(x)$ в точке c называется многочлен вида

$$P_n(x) = f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x - c)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x - c)^n.$$

*Свойство многочлена Тейлора**

В точке c совпадают значения функции и ее многочлена Тейлора, а также значения их первых n производных, т.е.

$$P_n(c) = f(c), P'_n(c) = f'(c), \dots, P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c).$$

Доказательство

$$\begin{aligned} P_n(c) &= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(c - c) + \frac{1}{2!}f''(c)(c - c)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(c - c)^n = \\ &= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c) \cdot 0 + \frac{1}{2!}f''(c) \cdot 0 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c) \cdot 0 = f(c). \end{aligned}$$

$$P'_n(x) = \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(x-c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(x-c)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} P'_n(c) &= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c)(c-c) + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c)(c-c)^{n-1} = \\ &= \frac{1}{1!}f'(c) + \frac{1}{2!}2f''(c) \cdot 0 + \dots + \frac{1}{n!}nf^{(n)}(c) \cdot 0 = f'(c) \end{aligned}$$

Аналогично для остальных производных. ■

Теорема (формула Тейлора)

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и имеет в точке $c \in (a, b)$ производные до порядка n включительно. Тогда $\forall x \in (a, b)$ справедлива **формула Тейлора n -ого порядка**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + \frac{1}{1!}f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + r_n = P_n(x) + r_n, \end{aligned}$$

где r_n - остаточный член формулы Тейлора.

Формы записи остаточного члена:

1) форма Пеано

$$r_n = o((x-c)^n), x \rightarrow c$$

2) форма Лагранжа

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c + \theta(x-c))(x-c)^{n+1}, 0 < \theta < 1$$

Определение

Формулой Маклорена называется формула Тейлора при $c = 0$, т.е. формула вида

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n), x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2 Приближенные вычисления по формуле Тейлора

Разложив функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки c , будем иметь

$$f(x) = P_n(x) + r_n \quad \forall x \in U(c),$$

где $P_n(x)$ - многочлен Тейлора степени n , а $r_n = o((x - c)^n)$, $x \rightarrow c$ - остаточный член формулы Тейлора.

Отбросив r_n , получим приближенную формулу

$$f(x) \approx P_n(x).$$

Чем больше n и ближе x к c , тем точнее данная формула.

Пример:

$$\sin \frac{\pi}{6} = 0.5, \quad \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x + o(x^2) \approx x, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.5236.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \approx x - \frac{x^3}{3!}, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.4997.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad \sin \frac{\pi}{6} \approx 0.500003.$$

3 Монотонность функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на интервале (a, b) , если

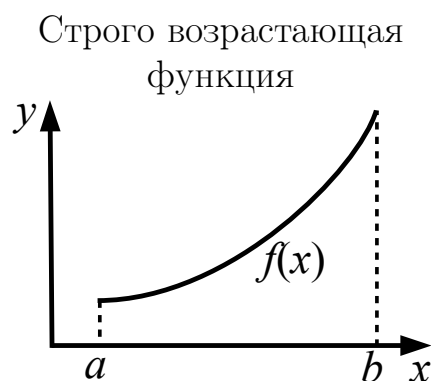
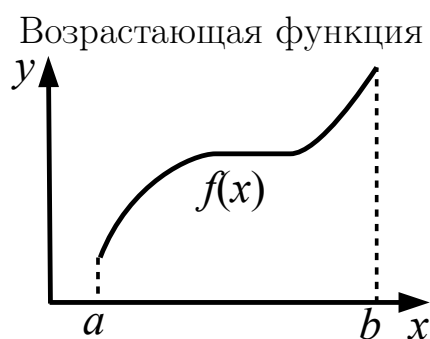
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2: f(x_1) \leq f(x_2).$$

Определение

Функция $f(x)$ называется **строго возрастающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2: f(x_1) < f(x_2).$$

Примеры:



Определение

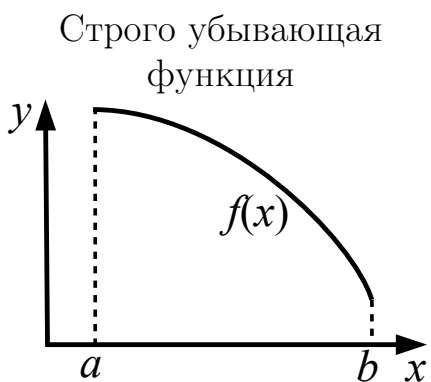
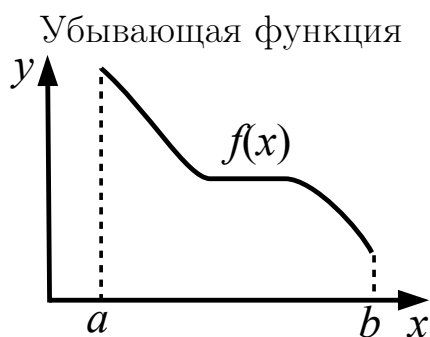
Функция $f(x)$ называется **убывающей** на интервале (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2: f(x_1) \geq f(x_2)$.

Определение

Функция $f(x)$ называется **строго убывающей** на интервале (a, b) , если

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2: f(x_1) > f(x_2).$$

Примеры:



Определение

Возрастающие и убывающие функции называются **МОНОТОННЫМИ**.

Определение

Строго возрастающие и строго убывающие функции называются **строго монотонными**.

Обозначения

$f(x) \in C(c), f(x) \in C(a, b), f(x) \in C[a, b]$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке c , на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$.

$f(x) \in D(c), f(x) \in D(a, b), f(x) \in D[a, b]$ - функция $f(x)$ дифференцируема в точке c , на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производную $f'(x)$ на этих промежутках.

$f(x) \in D^2(c), f(x) \in D^2(a, b), f(x) \in D^2[a, b]$ - функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c , на интервале (a, b) , на отрезке $[a, b]$, т.е. имеет производные $f'(x), f''(x)$ на этих промежутках.

*Теорема (достаточное условие монотонности)**

Пусть $f(x) \in D(a, b)$. Если $\forall x \in (a, b) f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то на интервале (a, b) функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает).

Доказательство

Пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), c \in (x_1, x_2).$$

Откуда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, получаем

1) если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго возрастает,

2) если $f'(c) < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ или $f(x_2) < f(x_1)$, т.е. $f(x)$ строго убывает. ■

4 Экстремум функции

Определение

Точка c называется **критической точкой** функции $f(x)$, если ее производная $f'(c)$ равна нулю или не существует.

Определение

Точка c называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если

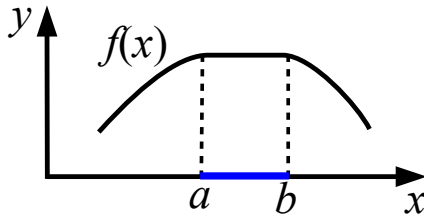
$$\exists \mathring{U}(c) \forall x \in \mathring{U}(c): f(x) \leq f(c).$$

Определение

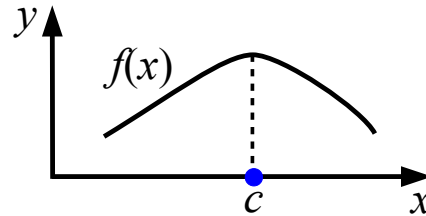
Точка c называется **точкой строгого локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \mathring{U}(c) \forall x \in \mathring{U}(c): f(x) < f(c).$$

Примеры:



Каждая точка отрезка $[a, b]$ - это точка локального максимума



Точка c - это точка строгого локального максимума

Определение

Точка c называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если

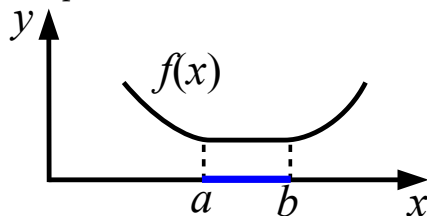
$$\exists \mathring{U}(c) \forall x \in \mathring{U}(c): f(x) \geq f(c).$$

Определение

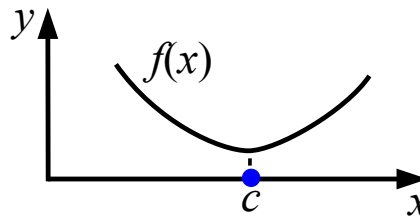
Точка c называется **точкой строгого локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \mathring{U}(c) \forall x \in \mathring{U}(c): f(x) > f(c).$$

Примеры:



Каждая точка отрезка $[a, b]$ - это точка локального минимума



Точка c - это точка строгого локального минимума

Определение

Точки локального максимума и минимума функции также называются **точками экстремума** функции.

Точки строгого локального максимума и минимума функции называются **точками строгого экстремума** функции.

Определение

Значение функции в точке локального максимума называется ее **локальным максимумом**.

Значение функции в точке локального минимума называется ее **локальным минимумом**.

Локальные максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**.

Замечание

Аналогично определяется **строгий экстремум функции**.